

MODUL MATEMATIK TAMBAHAN SPM TAHUN 2020

KANDUNGAN

TOPIK

1. FUNGSI	2
2. PERSAMAAN KUADRATIK	14
3. FUNGSI KUADRATIK	23
4. PERSAMAAN SERENTAK	40
5. INDEKS DAN LOGARITMA	57
6. GEOMETRI KOORDINAT	76
7. PEMBEZAAN	95
8. JANJANG	116
9. HUKUM LINEAR	144
10. FUNGSI TRIGONOMETRI	181
11. PILIHATUR DAN GABUNGAN	201
12. TABURAN KEBARANGKALIAN	209
13. PENYELESAIAN SEGITIGA	227
14. NOMBOR INDEKS	249



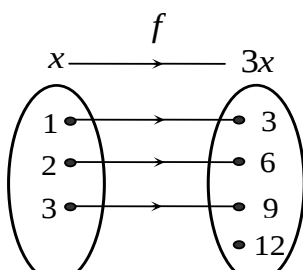
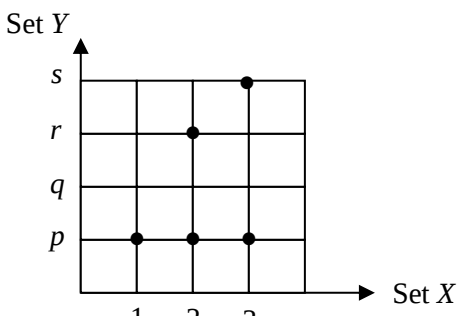
MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

1. FUNGSI

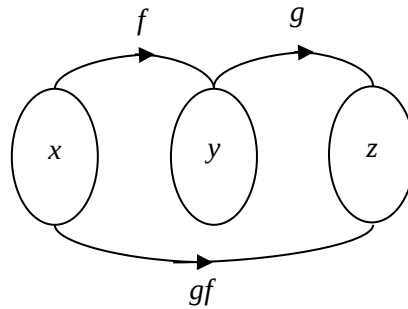


NOTA DAN CONTOH

Gambarajah Anak Panah	Pasangan bertertib
 • domain = {1, 2, 3} • kodomain = {3, 6, 9, 12} • julat = {3, 6, 9} • 1 ialah objek bagi 3, 2 ialah objek bagi 6, • 3 ialah imej bagi 1, 6 ialah imej bagi 2 • Jenis hubungan = satu kepada satu	$P = \{1, 2, 3\}$ $Q = \{2, 4, 6, 7, 10\}$ Hubungan P kepada Q ditakrifkan oleh set pasangan bertertib : $\{(1, 4), (1, 6), (2, 7), (3, 10)\}$. • Imej bagi 1 = 4 dan 6 • Objek bagi 4 = 1 • domain = {1, 2, 3} • kodomain = {2, 4, 6, 7, 10} • julat = {4, 6, 7, 10} • Jenis hubungan = satu kepada banyak
Graf	
	• Imej bagi 2 = p dan r • Objek bagi s = 3 • domain = {1, 2, 3} • kodomain = {p, q, r, s} • julat = {p, r, s} • jenis hubungan = banyak kepada banyak

CONTOH	CONTOH
1. Diberi fungsi $f : x \rightarrow 2x+1$, cari (i) $f(3)$ (ii) $f(-4)$ Jawapan : $f(x) = 2x + 1$ (i) $f(3) = 2(3) + 1$ $= 6 + 1$ $= 7$ (ii) $f(-4) = 2(-4) + 1$ $= -8 + 1$ $= -7$	2. Diberi fungsi $h : x \rightarrow \frac{6}{3x-4}$, $x \neq \frac{4}{3}$, cari $h(2)$. Jawapan : $h(x) = \frac{6}{3x-4}$ $h(2) = \frac{6}{3(2)-4}$ $= \frac{6}{2}$ $= 3$
3. Diberi $f : x \rightarrow 3x-1$, cari nilai x jika $f(x) = 5$. Jawapan : $f(x) = 5$ $3x - 1 = 5$ $3x = 6$ $\therefore x = 2$	4. Diberi $f : x \rightarrow x-2$, cari nilai x jika $f(x) = 6$. Jawapan : $f(x) = \pm 6$ $x - 2 = 6, \quad x - 2 = -6$ $x = 8 \quad \quad \quad x = -4$

FUNGSI GUBAHAN



CONTOH 1 :

Diberi $f : x \rightarrow 3x - 4$ dan $g : x \rightarrow 2x$, cari $fg(3)$.

Jawapan :

$$\begin{aligned} fg(x) &= f(2x) \\ &= 3(2x) - 4 \\ &= 6x - 4 \\ \therefore fg(3) &= 6(3) - 4 \\ &= 14 \end{aligned}$$

ATAU

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 4, \quad g(x) = 2x \\ g(3) &= 2(3) \\ &= 6 \\ fg(3) &= f[g(3)] \\ &= f(6) \\ &= 3(6) - 4 \\ &= 14 \end{aligned}$$

CONTOH 2 :

Diberi $f : x \rightarrow 3 - 2x$ and $g : x \rightarrow x^2$, cari $gf(4)$.

Jawapan :

$$\begin{aligned} gf(x) &= g(3 - 2x) \\ &= (3 - 2x)^2 \\ gf(4) &= (3 - 2(4))^2 \\ &= (-5)^2 \end{aligned}$$

ATAU

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 - 2x, \quad g(x) = x^2. \\ f(4) &= 3 - 2(4) \\ &= -5 \\ gf(4) &= g[f(4)] \\ &= g(-5) \\ &= (-5)^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

FUNGSI SONGSANG

Jika $f(x) = y$, maka $x = f^{-1}(y)$ ATAU jika $f^{-1}(x) = y$, maka $x = f(y)$

CONTOH 1	CONTOH 2
Diberi $f(x) = 2x - 3$, cari $f^{-1}(x)$. <i>Jawapan :</i> $2x - 3 = y$ $2x = y + 3$ $x = \frac{y+3}{2}$ $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$ $\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$	Diberi $g(x) = 3x + 5$, cari $g^{-1}(x)$. <i>Jawapan :</i> $3x + 5 = y$ $3x = y - 5$ $x = \frac{y-5}{3}$ $g^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$ $\therefore g^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$
CONTOH 3	CONTOH 4
Diberi $f(x) = 8 - 5x$, cari $f^{-1}(x)$. <i>Jawapan :</i> $8 - 5x = y$ $-5x = y - 8$ $x = \frac{y-8}{-5}$ $f^{-1}(y) = \frac{y-8}{-5}$ $\therefore f^{-1}(x) = \frac{y-8}{-5} // \frac{-y+8}{5} // \frac{8-y}{5}$	Diberi $f: x \rightarrow \frac{2x+1}{2-x}$, $x \neq 2$, cari $f^{-1}(x)$. <i>Jawapan :</i> $\frac{2x+1}{2-x} = y$ $2x+1 = y(2-x)$ $2x+1 = 2y-xy$ $2x+xy = 2y-1$ $x(2+y) = 2y-1$ $x = \frac{2y-1}{2+y}$ $f^{-1}(y) = \frac{2y-1}{2+y}$ $\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{2+x}$

MENCARI NILAI $f^{-1}(a)$ APABILA DIBERI $f(x)$

Contoh : Diberi $f: x \rightarrow 2x + 1$, cari nilai $f^{-1}(7)$.

KAEDAH 1 [Cari f^{-1} dahulu]	KAEDAH 2 [Tanpa mencari $f^{-1}(x)$]
$f(x) = 2x + 1$ $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ $f^{-1}(7) = \frac{7-1}{2} = 3$	$f(x) = 2x + 1$ $2x + 1 = 7$ $2x = 6$ $x = 3 \quad \therefore f^{-1}(7) = 3$

(Jika tidak disoal untuk mencari $f^{-1}(x)$ tetapi hanya mencari nilai $f^{-1}(a)$, lebih mudah gunakan Kaedah 2)

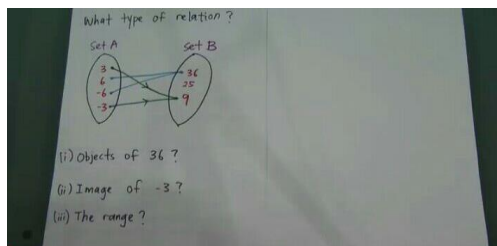
NOTA TAMBAHAN



Chapter 1 Functions

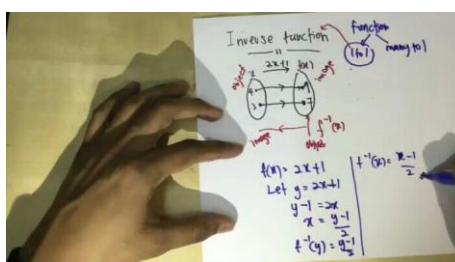
#SPM #AddMaths #Functions
SPM FORM 4 ADDITIONAL
MATHEMATICS | CHAPTER 1...

<https://youtu.be/3D36ibo7FKE>



SPM Form 4- Add Maths - Basic of
Function

<https://youtu.be/RrYIvD-uFOw>



F4 - Inverse function (fungsi songsang)

<https://youtu.be/6HiWm9ZTW30>

LATIHAN

- 1 Berdasarkan maklumat yang diberi, hubungan P dan Q ditakrifkan oleh set pasangan bertertib $\{(1, 2), (1, 4), (2, 6), (2, 8)\}$.

$$P = \{ 1, 2, 3 \}$$

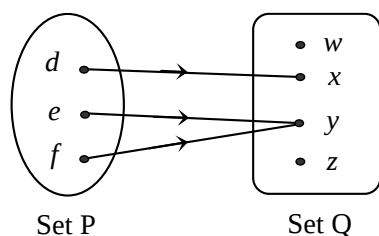
$$Q = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$$

Nyatakan

- (a) imej bagi 1,
(b) objek bagi 2.

[2 markah]

- 2 Rajah menunjukkan hubungan antara set P dan set Q.

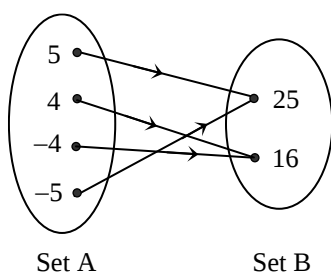


Nyatakan

- (a) julat hubungan itu,
(b) jenis hubungan itu.

[2 markah]

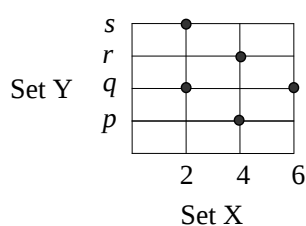
- 3 Dalam rajah, set B menunjukkan imej bagi unsur-unsur tertentu set A.



- (a) Nyatakan jenis hubungan antara set A dengan set B.
(b) Dengan menggunakan tatatanda fungsi, tulis satu hubungan antara set A dengan set B.

[2 markah]

- 4 Rajah menunjukkan hubungan antara set X dan set Y dalam bentuk graf.

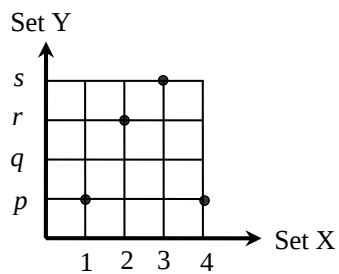


Nyatakan

- (a) objek-objek bagi q .
(b) kodomain hubungan itu.

[2 markah]

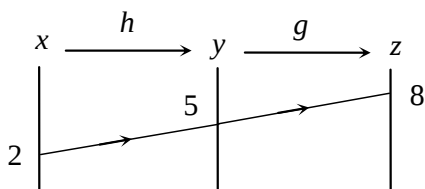
- 5 Rajah menunjukkan hubungan antara set X dan set Y dalam bentuk graf.



Nyatakan

- (a) hubungan itu dalam bentuk pasangan tertib,
 (b) jenis hubungan itu,
 (c) julat hubungan itu. [3 markah]

- 6 Dalam rajah, fungsi h memetakan x kepada y dan fungsi g memetakan y kepada z .

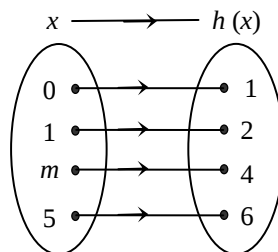


Tentukan

- (a) $h^{-1}(5)$,
 (b) $gh(2)$.

[2 markah]

- 7 Rajah menunjukkan fungsi linear h .



- (a) Nyatakan nilai m .
 (b) Menggunakan tatatanda fungsi, ungkapkan h dalam sebutan x .

[2 markah]

- 8 Diberi fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = kx + 2$, cari

- (a) $f(5)$,
 (b) nilai k dengan keadaan $gf(5) = 14$.

[3 markah]

9 Diberi fungsi $g : x \rightarrow 3x - 1$, cari

(a) $g(2)$,

(b) nilai p apabila $g^{-1}(p) = 11$.

[3 markah]

10 Diberi fungsi $f : x \rightarrow |x - 3|$, cari nilai-nilai x dengan keadaan $f(x) = 5$.

[2 markah]

11 Diberi bahawa fungsi $g(x) = 4x - 7$ dan $h(x) = 2x$. Cari nilai $gh(2)$.

[2 markah]

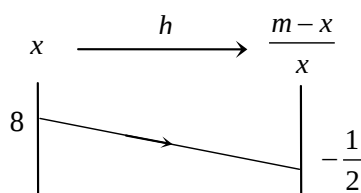
12 Diberi fungsi $g : x \rightarrow 2x - 3$ dan $h : x \rightarrow 4x$, cari

(a) $hg(x)$,

(b) nilai x jika $hg(x) = \frac{1}{2}g(x)$.

[4 markah]

13 Rajah menunjukkan fungsi $h : x \rightarrow \frac{m-x}{x}$, $x \neq 0$, dengan keadaan m ialah pemalar.



Carikan nilai m .

[2 markah]

14 Diberi $g : x \rightarrow 5x + 1$ dan $h : x \rightarrow x^2 - x + 3$, carikan

(a) $g^{-1}(3)$.

(b) $hg(x)$.

[4 markah]

15 Diberi fungsi $g : x \rightarrow 5x + 2$ dan $h : x \rightarrow x^2 - 4x + 3$, cari

(a) $g^{-1}(6)$,

(b) $hg(x)$,

[4 markah]

16 Diberi fungsi $g : x \rightarrow 2x + 1$ dan $h : x \rightarrow 3x + 6$, cari

(a) $g^{-1}(x)$,

(b) $hg^{-1}(9)$,

[3 markah]

17 Maklumat berikut adalah berkaitan dengan fungsi h dan fungsi g .

$$h : x \rightarrow 2x - 3$$

$$g : x \rightarrow 4x - 1$$

Carikan $g h^{-1}(x)$.

[3 markah]

- 18 Diberi fungsi $h^{-1} : x \rightarrow 4x + m$ dan $h : x \rightarrow 2kx + \frac{5}{8}$, dengan keadaan m dan k adalah pemalar, carikan nilai m dan nilai k . [3 markah]

- 19 Fungsi w ditakrifkan oleh $w(x) = \frac{5}{2-x}$, $x \neq 2$. Cari

- (a) $w^{-1}(x)$,
(b) $w^{-1}(4)$.

[3 markah]

- 20 Maklumat berikut adalah berkaitan dengan fungsi h dan fungsi gubahan h^2 .

$h : x \rightarrow ax + b$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar, dan $a > 0$ $h^2 : x \rightarrow 36x + 35$
--

Cari nilai a dan nilai b .

[3 markah]

- 21 Diberi fungsi $h(x) = \frac{6}{x}$, $x \neq 0$ dan fungsi gubahan $hg(x) = 3x$, carikan

- (a) $g(x)$,
(b) nilai x apabila $gh(x) = 5$.

[4 markah]



22 Diberi fungsi $g : x \rightarrow x - 8$ dan $h : x \rightarrow \frac{x}{3x-2}$, $x \neq \frac{2}{3}$, cari nilai $hg(10)$. [3 markah]

23 Fungsi songsang h^{-1} ditakrifkan $h^{-1} : x \rightarrow \frac{2}{3-x}$, $x \neq 3$. Cari

(a) $h(x)$.

(a) nilai x dengan keadaan $h(x) = -5$.

[4 markah]

24 Diberi $f(x) = 3x + 4$ dan $fg(x) = 6x + 7$, cari

(a) $fg(4)$,

(b) $g(x)$.

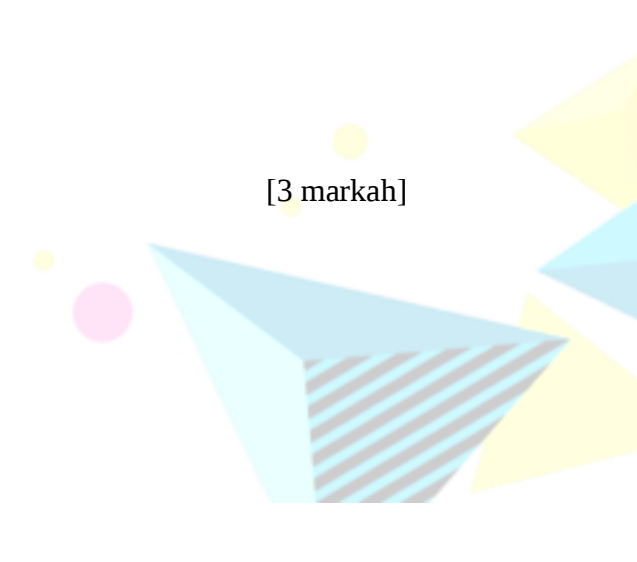
[4 markah]

25 Diberi $f : x \rightarrow x + 5$, cari

(a) $f(3)$,

(b) nilai k dengan keadaan $2f^{-1}(k) = f(3)$.

[3 markah]



Jawapan

1. (a) 2 dan 4 (b) 1
 2. (a) $\{x, y\}$ (b) banyak kepada satu
 3. (a) banyak kepada satu (b) $f: x \rightarrow x^2 // f(x) = x^2$
 4. (a) 2 dan 6 (b) $\{p, q, r, s\}$
 5. (a) $\{(1, p), (2, r), (3, s), (4, p)\}$ (b) banyak kepada satu (c) $\{p, r, s\}$
 6. (a) 2 (b) 8
 7. (a) 3 (b) $h: x \rightarrow x + 1 // h(x) = x + 1$
 8. (a) 4 (b) $k = 3$
 9. (a) 5 (b) $p = 32$
 10. 8 atau -2
 11. 9
 12. $8x - 12$ (b) $\frac{3}{2}$
 13. $m = 4$
 14. (a) $\frac{2}{5}$ (b) $25x^2 + 5x + 3$
 15. (a) $\frac{4}{5}$ (b) $25x^2 - 1$
 16. (a) $\frac{x-1}{2}$ (b) 18
 17. $2x + 5$
 18. $m = -\frac{5}{2}, k = \frac{1}{8}$
 19. (a) $\frac{2x-5}{x}$ (b) $\frac{3}{4}$
 20. $a = 6, b = 5$
 21. (a) $\frac{2}{x}$ (b) 15
 22. $\frac{1}{2}$
 23. (a) $\frac{3x-2}{x}$ (b) $\frac{1}{4}$
 24. (a) 31 (b) $2x + 1$
 25. (a) 8 (b) 9
- 



MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

2. PERSAMAAN KUADRATIK



NOTA DAN CONTOH

2.1. Persamaan kuadrat dan puncanya

Bentuk am : $ax^2 + bx + c = 0$

Contoh : Ungkapkan $x(x + p) = 3x + 4$ dalam bentuk am dan nyatakan nilai a, b dan c. $x^2 + px - 3x - 4 = 0$ $x^2 + (p - 3)x - 4 = 0$ $a = 1, b = p - 3, c = -4$	Contoh : Jika 2 ialah punca bagi persamaan kuadrat $x^2 + 4kx - 12 = 0$, cari nilai k. $(2)^2 + 4k(2) - 12 = 0$ $4 + 8k - 12 = 0$ $8k = 8$ $k = 1$
--	---

2.2. Penyelesaian Persamaan Kuadrat

2.2.1. Menentukan punca persamaan kuadrat, $ax^2 + bx + c = 0$

- **Pemfaktoran**

- **Formula :** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- **Kalkulator :** mode $\Rightarrow$ mode $\Rightarrow$ mode [1] $\Rightarrow$ ► [2] $\Rightarrow$ a = ?, b = ?, c = ?, = (x₁), = (x₂)

<i>Pemfaktoran ~ Kalkulator</i>	<i>Formula</i>
Contoh : Selesaikan persamaan kuadrat $3x^2 + 5x - 2 = 0,$ $\begin{array}{r l} 3x & -1 \\ x & 2 \end{array} \left \begin{array}{l} -x \\ 6x \end{array} \right\} +$ $\begin{array}{r l} 3x^2 & -2 \\ & 5x \end{array}$ $(3x - 1)(x + 2) = 0$ $x = \frac{1}{3}, x = -2$	Contoh : Selesaikan persamaan kuadrat $x(2x - 5) = 2x - 1$ $2x^2 - 5x - 2x + 1 = 0$ $2x^2 - 7x + 1 = 0$ $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$ $x = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{4}$ $x = 3.351, 0.149$

2.2.2. Membentuk persamaan kuadratik daripada punca

$$x^2 - (\text{HTP})x + \text{HDP} = 0$$

- HTP (hasil tambah punca) = $\alpha + \beta$, HDP (hasil darab punca) = $\alpha\beta$
- $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \text{HTP} = -\frac{b}{a}$ dan $\text{HDP} = \frac{c}{a}$

Contoh : Bentukkan persamaan kuadratik jika diberi punca $-\frac{1}{2}$ dan 6. HTP : $-\frac{1}{2} + 6 = \frac{11}{2}$ HDP : $-\frac{1}{2} \times 6 = -3$ $x^2 - \left(\frac{11}{2}\right)x + (-3) = 0$ $2x^2 - 11x - 6 = 0$	Contoh : Diberi α dan β adalah punca-punca bagi persamaan kuadratik $2x^2 + 3x + 4 = 0$, bentukkan persamaan kuadratik yang mempunyai punca-punca 2α dan 2β. $\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{4}{2} = 2$ Bagi punca-punca 2α dan 2β, $\begin{aligned} \text{HTP} &= 2\alpha + 2\beta & \text{HDP} &= 2\alpha(2\beta) \\ &= 2(\alpha + \beta) & &= 4\alpha\beta \\ &= 2\left(-\frac{3}{2}\right) & &= 4(2) \\ &= -3 & &= 8 \end{aligned}$ $x^2 - (-3)x + (8) = 0$ $x^2 + 3x + 8 = 0$
--	--

2.3 Jenis punca persamaan kuadratik

dua punca berbeza	Dua punca sama	Tiada punca
$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
Bersilang pada 2 titik berbeza	Tangen	Tidak bersilang

Contoh 1 : $hx^2 + kx + 3 = 0$ mempunyai <u>dua punca sama</u>, ungkapkan h dalam sebutan k. $\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ k^2 - 4(h)(3) &= 0 \\ k^2 - 12h &= 0 \\ k^2 &= 12h \\ h &= \frac{k^2}{12} \end{aligned}$	Contoh 2 : Diberi persamaan $(x - 1)(x - 2) = k$ mempunyai dua punca berbeza. Cari julat nilai k. $\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 - k &= 0 \\ b^2 - 4ac &> 0 \\ (-3)^2 - 4(1)(2 - k) &> 0 \\ 9 - 8 + 4k &> 0 \\ k &> -\frac{1}{4} \end{aligned}$
---	---

NOTA TAMBAHAN



Membentuk Persamaan Kuadrat

Jika m dan n ialah punca-punca persamaan $2x^2 - 4x + 1 = 0$,
bentukan persamaan kuadrat dengan punca-punca $3m$ dan $3n$.

Tip
 $x^2 - (HTP)x + HDP = 0$
 $HTP = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
 $HDP = \alpha \beta = \frac{c}{a}$

Bab 2 Persamaan Kuadrat
Membentuk Persamaan Kuadrat

2.4 Membentuk Persamaan Kuadrat -
Matematik Tambahan Tingkatan 4

<https://youtu.be/wfl-v9rilcc>



<https://youtu.be/C6ZiLheCnfM>

YouTube
Addmath Form 4 Bab 2 Alpha Beta
Salah satu bentuk soalan yang diberikan
dua punca alpha dan beta.

<https://youtu.be/C6ZiLheCnfM>



<https://youtu.be/hgML-Tb2SHY>

YouTube
Addmath Form 4 bab 2 (Pembezalayan)
Bab Persamaan Kuadrat (Pembezalayan).
Tips menghafal formulanya, Tips
menjawab soalan berkaitan yang
awesome!!

Jom Share, Like and Subscribe yeeaAH! =D

<https://youtu.be/hgML-Tb2SHY>

LATIHAN

2.1. Persamaan kuadratik dan puncanya

1. Diberi bahawa -1 ialah satu daripada punca persamaan kuadratik $x^2 - 4x - p = 0$.
Cari nilai p .
(Jwp : 5) [2 markah]
[SPM 2008]

2. Diberi -7 ialah satu daripada punca persamaan kuadratik $(x + k)^2 = 16$, dengan keadaan k ialah pemalar. Cari nilai-nilai k .
(Jwp : 3, 11) [2 markah]
[SPM 2015]

3. Diberi bahawa persamaan kuadratik $x(x - 5) = 4$
 - (a) Ungkapkan persamaan itu dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$.
 - (b) Nyatakan hasil tambah punca bagi persamaan itu.
(Jwp : 5)
 - (c) Tentukan jenis punca bagi persamaan itu.
(Jwp : dua punca berbeza)
[3 markah]
[SPM 2013]

4. Diberi persamaan kuadratik $2x^2 + mx - 5 = 0$, dengan keadaan m ialah pemalar, cari nilai m jika
 - (a) satu daripada punca-punca persamaan itu ialah 2 ,
(Jwp : $\frac{3}{2}$)
 - (b) hasil tambah punca-punca persamaan itu ialah -4 .
(Jwp : 8)
[4 markah]
[SPM 2014]



2.2. Penyelesaian Persamaan Kuadratik

5. Selesaikan persamaan kuadratik $2x(x - 4) = (1 - x)(x + 2)$.
Berikan jawapan anda betul kepada empat angka bererti.

(Jwp : $-0.2573, 2.591$) [3 markah]

[SPM 2003]

6. Selesaikan persamaan kuadratik $x(2x - 5) = 2x - 1$. Berikan jawapan anda betul kepada tiga tempat perpuluhan.

(Jwp : $0.149, 3.351$) [3 markah]

[SPM 2005]

7. Bentukkan persamaan kuadratik yang mempunyai punca-punca -3 dan $\frac{1}{2}$.

Beri jawapan anda dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan keadaan a, b , dan c adalah pemalar.
(Jwp : $2x^2 + 5x - 3 = 0$) [2 markah]

[SPM 2004]

8. (a) Selesaikan persamaan kuadratik berikut :

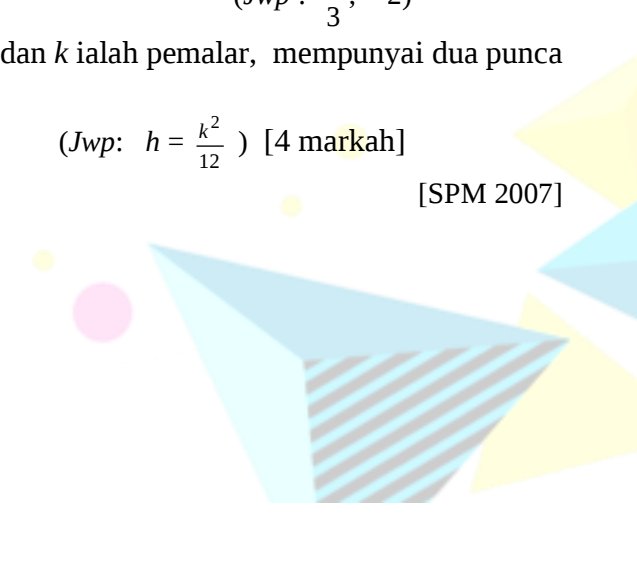
$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

(Jwp : $\frac{1}{3}, -2$)

- (b) Persamaan kuadratik $hx^2 + kx + 3 = 0$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar, mempunyai dua punca sama. Ungkapkan h dalam sebutan k .

(Jwp: $h = \frac{k^2}{12}$) [4 markah]

[SPM 2007]



9. Diberi bahawa persamaan kuadratik $3x^2 + 8x + 7 = 0$ mempunyai punca-punca α dan β . Bentukkan persamaan kuadratik dengan punca-punca 3α dan 3β .

(Jwp : $x^2 + 8x + 21 = 0$) [3 markah]

[SPM 2016]

10. Diberi bahawa 3 dan $m + 4$ ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $x^2 + (n - 1)x + 6 = 0$, dengan keadaan m dan n ialah pemalar. Cari nilai m dan nilai n .

(Jwp : $m = -2, n = -4$) [3 markah]

[SPM 2012]

11. Diberi bahawa persamaan kuadratik $hx^2 - 3x + k = 0$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar, mempunyai punca-punca β dan 2β . Ungkapkan h dalam sebutan k .

(Jwp : $\frac{2}{k}$) [3 markah]

[SPM 2018]

2.3 Jenis punca persamaan kuadratik

12. Persamaan kuadratik $x(x + 1) = px - 4$ mempunyai dua punca berbeza. Carikan julat nilai p .

(Jwp: $p < -3, p > 5$) [3 markah]

[SPM 2003]

13. Garis lurus $y = 5x - 1$ tidak bersilang dengan lengkung $y = 2x^2 + x + p$. Carikan julat nilai p .
(Jwp : $p > 1$) [4 markah]
[SPM 2005]

14. Suatu persamaan kuadratik $x^2 + px + 9 = 2x$ mempunyai dua punca sama.
Carikan nilai-nilai p yang mungkin. (Jwp : $-4, 8$) [4 markah]
[SPM 2006]

15. Persamaan kuadratik $x^2 + x = 2px - p^2$, dengan keadaan p ialah pemalar, mempunyai dua punca yang berbeza. Cari julat nilai p .
(Jwp : $p < \frac{1}{4}$) [3 markah]
[SPM 2009]

16. Persamaan kuadratik $(1 - p)x^2 - 6x + 10 = 0$, dengan keadaan p ialah pemalar, mempunyai dua punca berbeza. Cari julat nilai p .
(Jwp : $p > \frac{1}{10}$) [3 markah]
[SPM 2010]

17. Persamaan kuadratik $mx^2 + (1 + 2m)x + m - 1 = 0$ mempunyai dua punca sama.
Cari nilai m . (Jwp : $-\frac{1}{8}$) [3 markah]
[SPM 2011]

18. Persamaan kuadratik $x(x - 4) = h - 2k$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar, mempunyai dua punca sama. Ungkapkan h dalam sebutan k . (Jwp : $h = 2k - 4$) [3 markah]

[SPM 2012]

19. Diberi persamaan kuadratik $(1 - a)x^2 - 2x + 5 = 0$ tidak mempunyai punca, cari julat nilai a . (Jwp : $a < \frac{4}{5}$) [2 markah]

[SPM 2014]

20. (a) Diberi bahawa satu daripada punca-punca bagi persamaan kuadratik $x^2 + (p + 3)x - p^2 = 0$, dengan keadaan p ialah pemalar, adalah negatif kepada yang satu lagi. Cari nilai bagi hasil darab punca.

(Jwp : -9) [2 markah]

- (b) Diberi bahawa persamaan kuadratik $mx^2 - 5nx + 4m = 0$, dengan keadaan m dan n ialah pemalar, mempunyai dua punca yang sama. Cari $m : n$.

(Jwp : $5 : 4$) [2 markah]

[SPM 2017]

21. Diberi bahawa persamaan kuadratik $(px)^2 + 5qx + 4 = 0$ mempunyai dua punca yang sama manakala kuadratik $hx^2 - x + p = 0$ tiada punca, dengan keadaan p , q dan h ialah pemalar. Ungkapkan julat q dalam sebutan h .

(Jwp : $q > \frac{1}{5h}$, $q < -\frac{1}{5h}$) [3 markah]

[SPM 2019]



MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

3. FUNGSI KUADRATIK

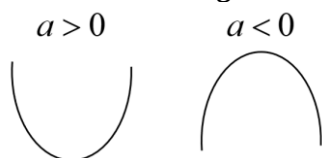


NOTA

1 Bentuk am fungsi kuadratik

$f(x)=ax^2 + bx + c$, dengan keadaan a , b dan c adalah pemalar, $a \neq 0$.

2 Bentuk Graf Fungsi Kuadratik



3 Hubungan antara bentuk graf fungsi kuadratik $f(x)$ dengan jenis punca apabila $f(x)=0$

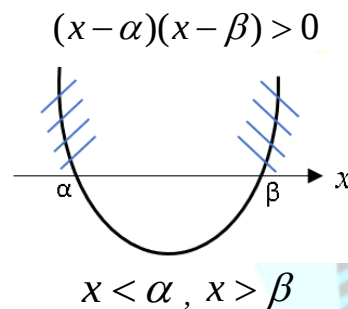
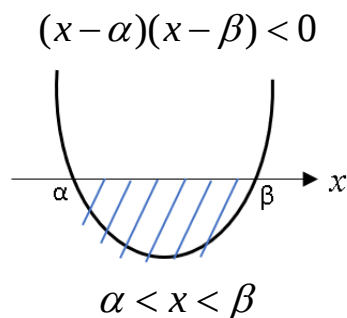
	$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			
Sentuh pada paksi-x	Sentuh dua titik pada paksi-x	Sentuh satu titik pada paksi-x	Tidak sentuh paksi-x
Jenis punca	Dua punca berbeza	Dua punca yang sama	Tiada punca

4 Nilai maksimum dan nilai minimum, fungsi kuadratik

$$f(x) = a(x + p)^2 + q$$

Jika $a > 0$,	Jika $a < 0$,
• Nilai minimum = q • Nilai x yang sepadan = $-p$ • Titik minimum = $(-p, q)$	• Nilai maksimum = q • Nilai x yang sepadan = $-p$ • Titik maksimum = $(-p, q)$

5 Ketaksamaan kuadratik



6. Mencari nilai maksimum/ minimum, nilai x yang sepadan dan titik maksimum / minimum dengan menggunakan Penyempurnaan kuasa dua (kaedah D2MS)

Kaedah D2MS

$f(x) = x^2 - 5x + 8$ Nombor di depan x

$f(x) = (x + \text{●})^2 + 8 - (\text{●})^2$ Divide 2 minus square

$f(x) = (x + \frac{-5}{2})^2 + 8 - (\frac{-5}{2})^2$

$f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4}$ Guna kalkulator

Contoh 1:

$$f(x) = x^2 + 5x + 6$$

$$f(x) = (x + \frac{5}{2})^2 + 6 - (\frac{5}{2})^2$$

$$f(x) = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

Mendapat maklumat berikut

nilai minimum = $-\frac{1}{4}$

nilai x yang sepadan = $-\frac{5}{2}$

titik minimum = $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$

Persamaan paksi simetri, $x = -\frac{5}{2}$

Contoh 2:

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 12$$

$$\frac{f(x)}{2} = \frac{2x^2}{2} + \frac{5x}{2} + \frac{12}{2}$$

$$\frac{f(x)}{2} = x^2 + \frac{5}{2}x + 6$$

$$\frac{f(x)}{2} = (x + \frac{5}{4})^2 + 6 - (\frac{5}{4})^2$$

$$\frac{f(x)}{2} = (x + \frac{5}{4})^2 + \frac{71}{16}$$

$$f(x) = 2(x + \frac{5}{4})^2 + \frac{71}{8}$$

nilai minimum = $\frac{71}{8}$

nilai x yang sepadan = $-\frac{5}{4}$

titik minimum = $(-\frac{5}{4}, \frac{71}{8})$

Persamaan paksi simetri, $x = -\frac{5}{4}$

7. Mencari nilai maksimum/ minimum, nilai x yang sepadan dan titik maksimum / minimum dengan menggunakan rumus $x = \frac{-b}{2a}$.

Contoh 1:

$$f(x) = x^2 + 5x + 6$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(1)} = -\frac{5}{2}$$

$$f(x) = x^2 + 5x + 6$$

$$y = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{2}\right) + 6$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

Jika soalan tidak minta guna kaedah menyempurnakan kuasa dua. Boleh guna cara ini.



$$\text{nilai minimum} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{nilai x yang sepadan} = -\frac{5}{2}$$

$$\text{titik minimum} = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$\text{Persamaan paksi simetri, } x = -\frac{5}{2}$$

Contoh 2:

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 12$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(2)} = -\frac{5}{4}$$

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 12$$

$$y = 2\left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{4}\right) + 12$$

$$y = \frac{71}{8}$$

$$\text{nilai minimum} = \frac{71}{8}$$

$$\text{nilai x yang sepadan} = -\frac{5}{4}$$

$$\text{titik minimum} = \left(-\frac{5}{4}, \frac{71}{8}\right)$$

$$\text{Persamaan paksi simetri, } x = -\frac{5}{4}$$

NOTA TAMBAHAN

QR CODE / LINK VIDEO

1. Kaedah Penyempurnaan kuasa dua:
https://youtu.be/qS_y5AtK8y8



2. Melakar Graf fungsi Kuadratik:
<https://youtu.be/6bVDtyZItZg>

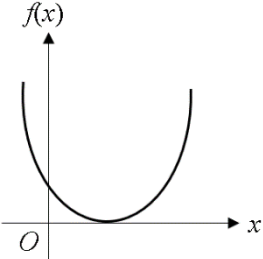
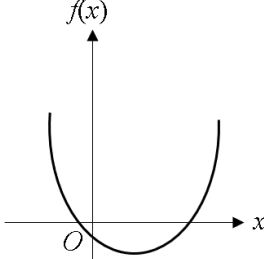
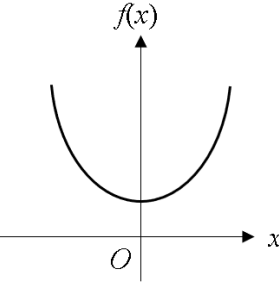
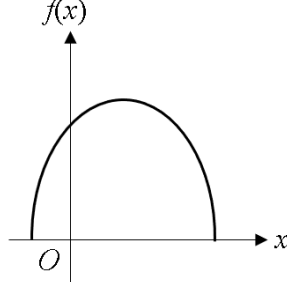
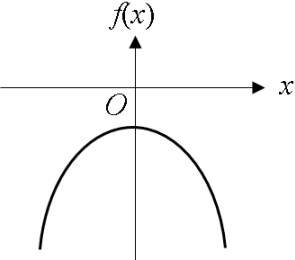
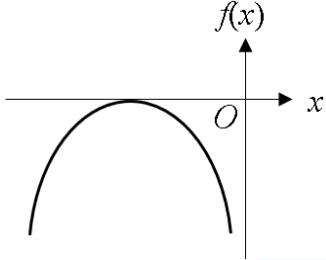


LATIHAN

1. Antara berikut yang manakah fungsi kuadratik dalam bentuk am? (tandakan ✓)

- | | |
|----------------------------|---|
| (a) $g(x) = 2x^2 - 3x + 5$ | <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 25px; margin: 0 auto;"></div> |
| (b) $h(x) = 3(x-2)(x+3)$ | <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 25px; margin: 0 auto;"></div> |
| (c) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ | <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 25px; margin: 0 auto;"></div> |
| (d) $f(x) = 2(x-5)^2 + 4$ | <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 25px; margin: 0 auto;"></div> |
| (e) $g(x) = (2x-5)^2$ | <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 25px; margin: 0 auto;"></div> |
| (f) $h(x) = -x^2 - 3x + 4$ | <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 25px; margin: 0 auto;"></div> |

2. Tentukan jenis punca bagi setiap persamaan $f(x) = 0$ yang berikut. Beri sebab anda.

<u>Contoh:</u>  Dua punca yang sama, kerana lengkung sentuh paksi-x pada satu titik sahaja.	(a) 
(b) 	(c) 
(d) 	(e) 

3. Tentukan jenis punca bagi persamaan kuadratik $f(x) = 0$ yang berikut.
[Guna $b^2 - 4ac$ untuk menentukan jenis punca]

<u>Contoh:</u> $f(x) = 2x^2 - 5x - 12$ $b^2 - 4ac$ $= (-5)^2 - 4(2)(-12)$ $= 121$ Oleh kerana $b^2 - 4ac > 0$, maka fungsi $f(x)$ mempunyai dua punca yang berbeza.	(a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$
(b) $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$	(c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$
(d) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$	(e) $f(x) = x(5 - 2x)$
(f) $f(x) = (x - 4)(2x - 1)$	(g) $f(x) = -4 - x^2$

- 
4. Diberi graf fungsi kuadrat $f(x) = mx^2 + 2mx - 6 + m$ menyalang paksi-x pada dua titik berlainan, cari julat nilai m .

-
5. Diberi graf fungsi kuadrat $f(x) = 2px^2 - 6px + 9$ menyentuh paksi-x pada satu titik sahaja. Cari nilai p .

-
6. Diberi garis lurus $y = -5x + 1$ menyalang lengkung $y = h - x - 2x^2$ pada dua titik yang berlainan. Cari julat nilai h .

-
7. Tentukan titik minimum atau titik maksimum bagi setiap fungsi kuadrat yang berikut. [Guna $x = \frac{-b}{2a}$]

Contoh:

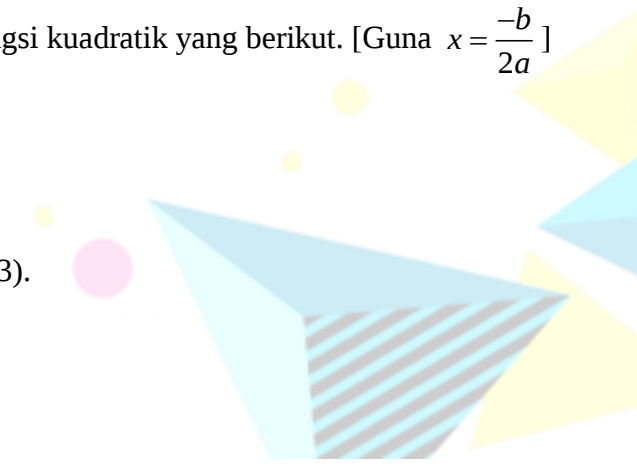
$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

$$y = (2)^2 - 4(2) + 7$$

$$y = 3$$

Maka titik minimum ialah (2, 3).



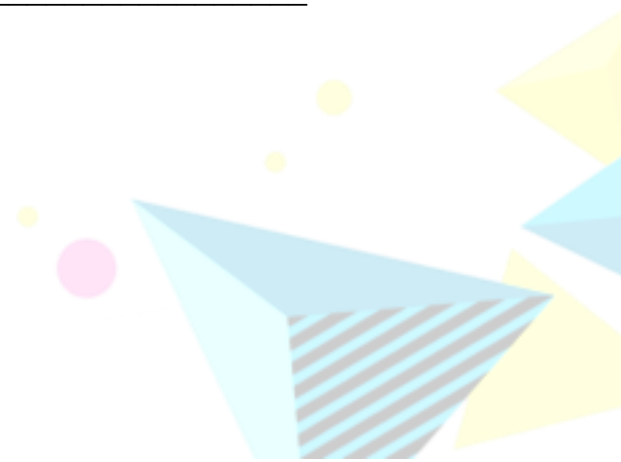


(a) $f(x) = -x^2 + 4x - 12$

(b) $f(x) = -4x^2 - 8x + 3$

(c) $f(x) = x(2x + 4) - 3$

(d) $f(x) = (2 - x)(x + 6)$



8. Diberi $f(x) = 2x^2 - mx + p$. Dengan menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua, tentukan titik maksimum atau minimum dalam sebutan m dan p .

-
9. Lakarkan graf bagi setiap fungsi kuadratik yang berikut.

Contoh:

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

- (1) $a = 1 (> 0)$, bentuk U. (titik minimum)
- (2) Guna kalkulator (EQN) kira punca: $x = 3.4142, 0.5858$
(dua jawapan, maka silang 2 tempat di paksi x)
- (3) Titik maksimum / minimum?

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)}$$

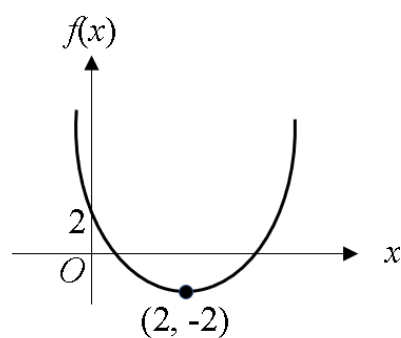
$$x = 2$$

$$y = (2)^2 - 4(2) + 2$$

$$y = -2$$

Maka, titik minimum ialah $(2, -2)$
(sebelah kanan paksi- y , di bawah paksi- x)

Jawapan:



- (4) Pintasan- $y = 2$



(a) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

(b) $f(x) = x^2 - 2x + 7$

(c) $f(x) = 16 + 6x - x^2$





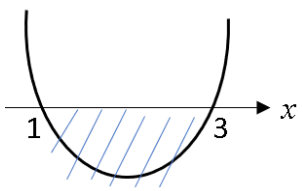
(d) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$

(e) $f(x) = -(x + \frac{3}{2})^2$

(f) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$



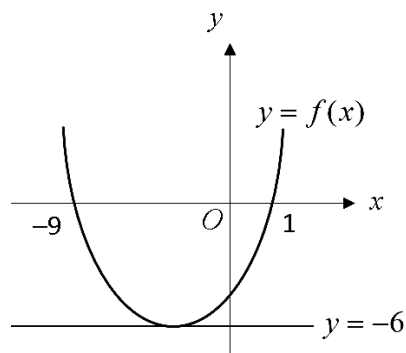
10. Tentukan julat nilai x yang memenuhi ketaksamaan kuadratik yang berikut.

<u>Contoh:</u> $(x-1)(x-3) < 0$  Maka, $1 < x < 3$	(a) $(x-5)(2x-1) > 0$
(b) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$	(c) $3x^2 + 14x + 8 > 0$
(d) $-2x^2 + 10x - 12 \geq 0$	(e) $4 + 11x - 3x^2 < 0$
(f) $(2x+1)(x-5) \geq 3(2x+1)$	(g) $(x+4)(2x-3) < 5(2x-3)$

11. Diberi persamaan kuadratik $x^2 + 2x = -4 - px$ mempunyai dua punca yang berbeza. Cari julat nilai p .

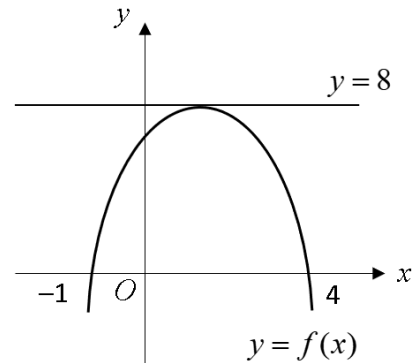
-
12. Diberi fungsi kuadratik $f(x) = x^2 + 2mx + n$ sentiasa negatif untuk $1 < x < 4$.
Cari nilai m dan nilai n .

-
13. Rajah menunjukkan graf fungsi kuadratik $y = f(x)$. Diberi garis lurus $y = -6$ ialah tangen kepada lengkung $y = f(x)$. Nyatakan
- (a) punca-punca persamaan $f(x) = 0$.
 - (b) persamaan paksi simetri bagi lengkung itu.



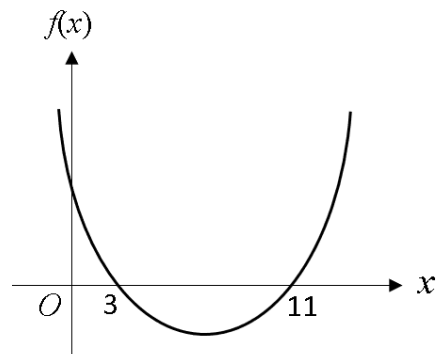
14. Rajah menunjukkan graf fungsi kuadratik $y = f(x)$. Diberi tangen pada titik maksimum lengkung ialah $y = 8$.

- (a) Nyatakan persamaan paksi simetri.
(b) Ungkapkan $f(x)$ dalam bentuk $f(x) = -(x + m)^2 + p$, dengan m dan p ialah pemalar.



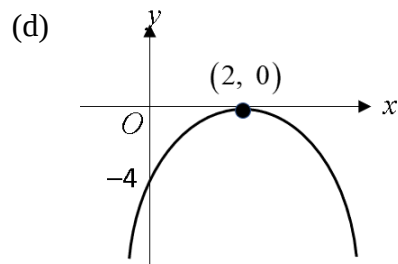
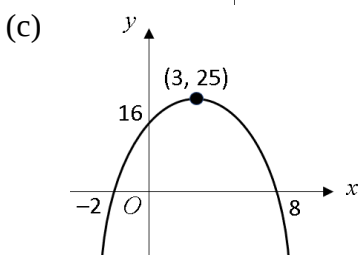
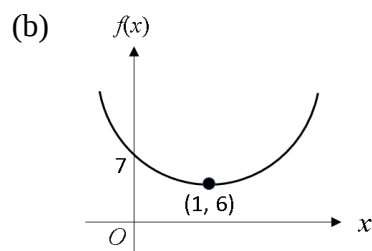
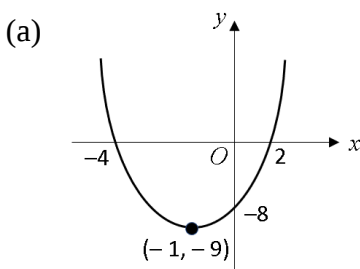
-
15. Rajah menunjukkan graf fungsi kuadratik $f(x) = (x - 7)^2 - 8$. Nyatakan

- (a) koordinat titik minimum bagi lengkung itu.
(b) persamaan paksi simetri bagi lengkung itu.
(c) julat nilai x apabila $f(x)$ ialah positif.

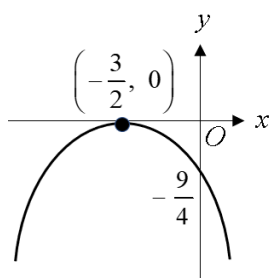


Jawapan:

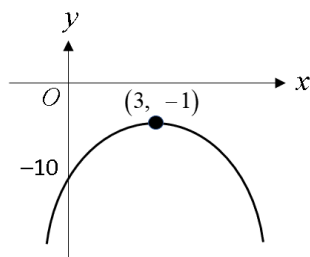
1. (a), (c), (f)
2. (a) Dua punca berbeza, kerana lengkung menyilang paksi- x pada dua titik.
(b) Tiada punca, kerana lengkung tidak menyentuh paksi- x .
(c) Dua punca berbeza, kerana lengkung menyilang paksi- x pada dua titik.
(d) Tiada punca, kerana lengkung tidak menyentuh paksi- x .
(e) Dua punca yang sama, kerana lengkung menyilang paksi- x pada satu titik sahaja.
3. (a) Oleh kerana $b^2 - 4ac < 0$, maka fungsi $f(x)$ tiada punca.
(b) Oleh kerana $b^2 - 4ac = 0$, maka fungsi $f(x)$ mempunyai dua punca yang sama.
(c) Oleh kerana $b^2 - 4ac < 0$, maka fungsi $f(x)$ tiada punca.
(d) Oleh kerana $b^2 - 4ac = 0$, maka fungsi $f(x)$ mempunyai dua punca yang sama.
(e) Oleh kerana $b^2 - 4ac > 0$, maka fungsi $f(x)$ mempunyai dua punca yang berbeza.
(f) Oleh kerana $b^2 - 4ac > 0$, maka fungsi $f(x)$ mempunyai dua punca yang berbeza.
(g) Oleh kerana $b^2 - 4ac < 0$, maka fungsi $f(x)$ tiada punca.
4. $m > 0$
5. $p = 2$
6. $h > -1$
7. (a) Titik maksimum = $(2, -8)$
(b) Titik maksimum = $(-1, -9)$
(c) Titik minimum = $(-1, -5)$
(d) Titik minimum = $(-2, -8)$
8. $f(x) = 2\left(x - \frac{m}{4}\right)^2 + p - \frac{m^2}{8}$, titik minimum = $\left(\frac{m}{4}, p - \frac{m^2}{8}\right)$
- 9.



(e)



(f)



10. (a) $x < \frac{1}{2}, x > 5$

(b) $-2 \leq x \leq 5$

(c) $x < -4, x > -\frac{2}{3}$

(d) $2 \leq x \leq 3$

(e) $x < -\frac{1}{3}, x > 4$

(f) $x \leq -\frac{1}{2}, x \geq 8$

(g) $1 < x < \frac{3}{2}$

11. $p < -6, p > 2$

12. $m = -\frac{5}{2}, n = 4$

13. (a) $x = -9, x = 1$

(b) $x = -4$

14. (a) $x = \frac{3}{2}$

(b) $f(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 8$

15. (a) $(7, -8)$

(b) $x = 7$

(c) $x < 3, x > 11$



MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

4. PERSAMAAN SERENTAK



NOTA DAN CONTOH

NOTA	CONTOH
LANGKAP PENYELESAIAN : - Dari persamaan linear, ungkapkan satu daripada pemboleh ubah sebagai perkara rumus. → kadang-kadang boleh juga dari persamaan tak linear - Gantikan (1) ke dalam persamaan bukan linear untuk membentuk persamaan kuadratik. - Susun persamaan kuadratik dalam bentuk am : $ax^2 + bx + c = 0$ - Permudahkan dan selesaikan persamaan kuadratik dengan menggunakan : kalkulator fx-570MS $3x^2 - 5x - 12 = 0$ $(\quad) (\quad) = 0$ MESTI $x = \quad \quad x = \quad$ dari kalkulator : fx-570MS mode mode mode 1 ▶ 2 $a ? 3 = \quad b ? -5 = \quad c ? -12 =$ $\rightarrow x_1 = 3$ $\rightarrow x_2 = -1.33 \dots$ shift a b/c $-\frac{4}{3}$ Catatan : jika papir x sahaja $\rightarrow x_1 = x_2$ secara manual $2x^2 - 5x = 0$ $x(2x - 5) = 0$ $x = 0 \quad x = \frac{5}{2}$ rumus $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (5) Dapatkan nilai pemboleh ubah yang satu lagi dengan menggantikan x_1 dan x_2 ke dalam (1). $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	BENTUK 1 ~ guna kalkulator / secara manual Selesaikan persamaan serentak : $2x - y - 3 = 0 \quad \text{dan} \quad 2x^2 + y = 10x - 9$ $2x - y - 3 = 0$ $\rightarrow 2x - 3 = y$ $2x^2 + y = 10x - 9$ $2x^2 + 2x - 3 - 10x + 9 = 0$ $2x^2 - 8x + 6 = 0$ $x^2 - 4x + 3 = 0$ $(x - 1)(x - 3) = 0$ $x = 1, \quad x = 3$ $x = 1, y = -1$ $x = 3, y = 3$ [SPM2007, S1] BENTUK 2 ~ guna rumus Selesaikan persamaan serentak : $2x + y = 1 \quad \text{dan} \quad 2x^2 + y^2 + xy = 5$ Berikan jawapan anda betul sehingga tiga tempat peruluhan. $2x + y = 1$ $\rightarrow y = 1 - 2x$ $2x^2 + y^2 + xy = 5$ $2x^2 + (1 - 2x)^2 + x(1 - 2x) - 5 = 0$ $2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 + x - 2x^2 - 5 = 0$ $4x^2 - 3x - 4 = 0$ $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(4)(-4)}}{2(4)}$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{8}$ $x = 1.443, -0.693$ $x = 1.443, y = -1.886$ $x = -0.693, y = 2.386$ [SPM2006, S1]



LATIHAN

- 1) Selesaikan persamaan serentak $4x + y = -8$ dan $x^2 + x - y = 2$.
(Jwp : $x = -3, y = 4$ dan $x = -2, y = 0$)

[5 markah]
[2003, No.1]

Jawapan :

- 2) Selesaikan persamaan serentak $x + \frac{1}{2}y = 1$ and $y^2 - 10 = 2x$.
(Jwp : $x = 3, y = -4$ dan $x = -\frac{1}{2}, y = 3$)

[5 markah]
[2005, No.1]

Jawapan :





3) Selesaikan persamaan serentak berikut :

$$2x - y - 3 = 0 \quad , \quad 2x^2 - 10x + y + 9 = 0.$$

(Jwp : $x = 1, y = -1$ dan $x = 3, y = 3$)

[5 markah]
[2007, No.1]

Jawapan :

4) Selesaikan persamaan serentak berikut :

$$x - 3y + 4 = 0 \quad , \quad x^2 + xy - 40 = 0.$$

(Jwp : $x = -6, y = -\frac{2}{3}$ dan $x = 5, y = 3$)

[5 markah]
[2008, No.1]

Jawapan :





5) Selesaikan persamaan serentak :

$$3x + y = 1, \quad 5x^2 + y^2 + 4xy - 5 = 0$$

(Jwp : $x = -1, y = 4$ dan $x = 2, y = -5$)

[5 markah]
[2012, No.1]

Jawapan :

6) Selesaikan persamaan serentak $4x + y = x^2 + x - y = -3$.

(Jwp : $x = -3, y = 9$ dan $x = -2, y = 5$)

[5 markah]

Jawapan :



7) Selesaikan persamaan serentak $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} + 2 = 0$ dan $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{3} = 0$.

(Jwp : $x = -6$, $y = \frac{3}{2}$ dan $x = 4$, $y = 9$)

[5 markah]

Jawapan :

8) Diberi $(2k, 3p)$ ialah penyelesaian bagi persamaan serentak $x - 2y = 8$ dan $\frac{2}{x} + \frac{3}{2y} = \frac{1}{2}$. Cari nilai k dan nilai p .

(Jwp : $k = 1$, $p = -1$ dan $k = 8$, $p = \frac{4}{3}$)

[5 markah]

Jawapan :

$\Rightarrow$ *Bentuk 2 ~ menggunakan rumus* $\left[x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]$

- 9) Selesaikan persamaan serentak $p - m = 2$ and $p^2 + 2m = 8$.
Berikan jawapan anda betul sehingga tiga tempat perpuluhan

(Jwp : $m = 0.606$, $p = 2.606$ dan $m = -6.606$, $p = -4.606$)

[5 markah]
[2004, No.1]

Jawapan :

- 10) Selesaikan persamaan serentak $2x + y = 1$ dan $2x^2 + y^2 + xy = 5$.
Beri jawapan anda betul kepada tiga tempat perpuluhan.

(Jwp : $x = 1.443$, $y = -1.886$ dan $x = -0.693$, $y = 2.386$)

[5 markah]
[2006, No.1]

Jawapan :

- 
- 11) Selesaikan persamaan serentak $k - 3p = -1$ dan $p + pk - 2k = 0$.
Beri jawapan anda betul kepada tiga tempat perpuluhan.

(Jwp : $k = 3.731$, $p = 1.577$ dan $k = 0.269$, $p = 0.423$)

[5 markah]
[2009, No.1]

Jawapan :

- 12). Selesaikan persamaan serentak $x - 2y = 7$ dan $xy - x = 9y$.
Beri jawapan betul kepada dua tempat perpuluhan.

(Jwp : $x = 4.76$, $y = -1.12$ dan $x = 13.24$, $y = 3.12$)

[5 markah]
[2010, No.1]

Jawapan :

- 
- 13) Selesaikan persamaan serentak $y - 2x + 1 = 0$ and $4x^2 + 3y^2 - 2xy = 7$.
Beri jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.

(Jwp : $x = 1.129$, $y = 1.258$ dan $x = -0.295$, $y = -1.590$)

[5 markah]
[2011, No.1]

Jawapan :

- 14) Selesaikan persamaan serentak $x + 2y = 1$ dan $\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 5$. Beri jawapan anda betul kepada tiga tempat perpuluhan.

(Jwp : $x = 0.284$, $y = 0.358$ dan $x = 2.116$, $y = -0.558$)

[5 markah]
[2019, No.1]

Jawapan :



⇒ **Ramalan**

- 1). Selesaikan persamaan serentak $x - 4y = 9$ dan $3y^2 = 7 - \frac{x}{2}$.

Berikan jawapan anda betul sehingga dua tempat perpuluhan
(Jwp : $x = 11.56$, $y = 0.64$ dan $x = 3.76$, $y = -1.31$)

[5 markah]

Jawapan :

Menyelesaikan masalah yang melibatkan persamaan serentak ; satu persamaan linear dan satu persamaan tak linear.

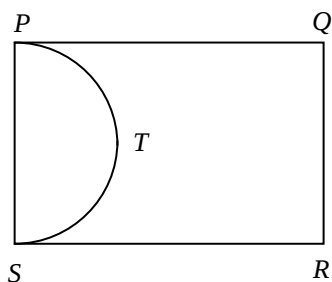
⇒ **KBAT**

- 1) Adam menanam sayur-sayuran di atas sebidang tanah yang berbentuk segi tiga bersudut tegak. Diberi sisi paling panjang tanah itu ialah y meter. Dua lagi sisi bagi tanah itu ialah masing-masing x meter dan $(2x - 1)$ meter. Dia menggunakan dawai berduri sepanjang 40 meter untuk memagar tanah itu. Cari panjang, dalam meter, bagi setiap sisi tanah.
(Jwp : 8, 15, 17)

[7 markah]
[2016, No.3]

Jawapan :

2) Rajah menunjukkan pelan bagi sebuah taman berbentuk segi empat tepat $PQRS$. Taman itu terdiri daripada sebuah kolam berbentuk semi bulatan PTS dan kawasan berumput $PQRST$.



Diberi bahawa $SR = 6y$ meter dan $QR = 7x$ meter, $x \neq y$. Luas taman berbentuk segi empat tepat $PQRS$ ialah 168 meter^2 dan perimeter kawasan berumput ialah 60 meter. Kolam dengan kedalaman seragam mengandungi 15.4 meter^3 air. Dengan menggunakan $\pi = \frac{22}{7}$, cari kedalaman, dalam meter, air dalam kolam itu. (Jwp : 0.45)

[7 markah]
[2018, No.4]

Jawapan :



⇒ **Ramalan**

3) Hasil tambah dua nombor ialah 9 dan hasil tambah kuasa dua nombor-nombor itu ialah 53. Cari hasil darab dua nombor itu.

(Jwp : 14)
[6 markah]

Jawapan :

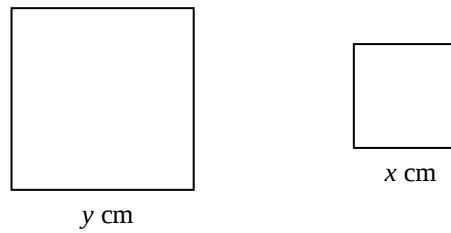
4) Fernandez membeli x ekor ayam dan y ekor itik dengan bayaran RM208. Diberi jumlah bilangan ayam dan itik yang dibeli ialah 20 ekor. Harga seekor ayam dan itik masing-masing ialah RM x dan RM y dengan keadaan $y > x$. Cari nilai x dan y .

(Jwp : $x = 8, y = 12$)
[6 markah]

Jawapan :



5) Seutas dawai yang panjangnya 52 cm dipotong kepada dua bahagian yang berlainan panjang. Setiap bahagian dawai itu dibengkokkan untuk membentuk sebuah segi empat sama sisi seperti dalam rajah di bawah.



Jika jumlah luas kedua-dua buah segi empat sama sisi itu ialah 89 cm^2 , carikan nilai x dan nilai y .
(Jwp : $x = 5, y = 8$)
[6 markah]

Jawapan :

6) Beza lilitan antara dua buah bulatan ialah $4\pi \text{ cm}$ dan hasil tambah luas dua buah bulatan itu ialah $52\pi \text{ cm}^2$.
Cari jejari setiap bulatan.
4, 6)

[6 markah]

Jawapan :



7) Seutas dawai berbentuk bulatan dengan jejari 14 cm dibengkok untuk membentuk sebuah segi empat tepat dengan panjang $(2y + 20)$ cm dan lebar $(x + 10)$ cm. Diberi luas segi empat terbentuk itu ialah 420 cm^2 , cari nilai x dan nilai y .

(Jwp : $x = 4$, $y = 5$ dan $x = 20$, $y = -3$)
[6 markah]

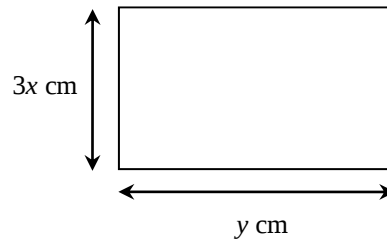
Jawapan :

8) Diberi perimeter sebuah segi empat tepat ialah 36 cm dan kuasa dua pepenjuru segiempat tepat itu ialah 170 cm^2 . Cari panjang dan lebar segi empat tepat itu.

(Jwp : 7, 11)
[6 markah]

Jawapan :

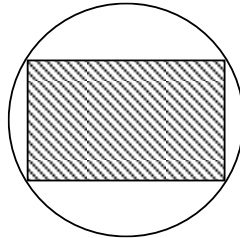
9) Rajah menunjukkan sekeping papan berbentuk segi empat tepat.



Seorang pekerja ingin memotong papan itu kepada dua keping papan berbentuk segi tiga. Perimeter segi tiga ialah 24 cm dan ukuran sisi terpanjang segi tiga itu ialah $(x + y) \text{ cm}$. Hitung luas, dalam cm^2 , papan itu. (Jwp : 48)
[6 markah]

Jawapan :

10) Rajah menunjukkan sekeping cermin berbentuk segi empat tepat yang diletakkan di atas permukaan meja bulat.

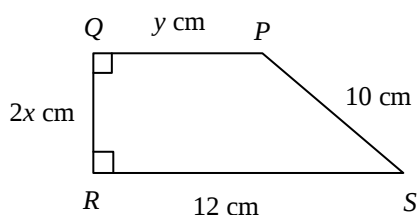


Jika perimeter segi empat tepat dan diameter bulatan itu masing-masing ialah 44 cm dan $\sqrt{340} \text{ cm}$, cari panjang dan lebar segi empat tepat itu. (Jwp : panjang = 18, lebar = 4)

[6 markah]

Jawapan :

11) Seutas dawai dengan panjangnya 32 cm dibengkokkan untuk membentuk sebuah trapezium $PQRS$ seperti ditunjukkan dalam Rajah di bawah dengan keadaan $\angle PQR = \angle SRQ = 90^\circ$, $PQ = y$ cm, $QR = 2x$ cm, $RS = 12$ cm dan $PS = 10$ cm.

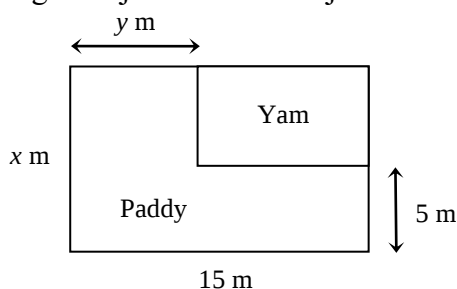


Carikan nilai x dan nilai y .

(Jwp : $x = 3$, $y = 4$)
[6 markah]

Jawapan :

12) Hafizie mempunyai sebidang tanah berbentuk segi empat tepat. Dia menanam padi dan keladi di tanah itu pada kawasan-kawasan seperti yang ditunjukkan dalam rajah.

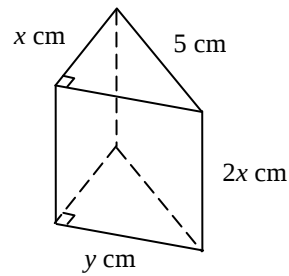


Kawasan tanaman keladi berbentuk segi empat tepat. Diberi luas kawasan tanaman padi ialah 115 m^2 dan perimeter kawasan keladi ialah 24 m. Carikan luas kawasan tanaman keladi itu. (Jwp : 35 m^2)

[6 markah]

Jawapan :

13) Rajah menunjukkan sebuah prisma dengan segi tiga bersudut tegak sebagai keratan rentasnya.



Diberi tinggi prisma ialah $2x$ cm. Jika jumlah panjang sisi dan jumlah luas permukaan bagi prisma masing-masing adalah 42 cm 84 cm^2 , cari

- (a) nilai x dan y dengan keadaan kedua-duanya bukan nombor bulat, (*Jwp* : $x = 2\frac{4}{5}$, $y = 4\frac{4}{5}$)
 (b) isi padu prisma itu. (*Jwp* : $37\frac{79}{125}$)
[7 markah]

Jawapan :

- 14) Sebuah kotak tertutup berbentuk kuboid mempunyai tapak berbentuk segi empat sama. Diberi jumlah panjang sisi kotak itu ialah 76 cm dan jumlah luas permukaan kuboid itu ialah 238 cm^2 . Cari panjang sisi tapak dan tinggi bagi kuboid itu. (*Jwp* : $x = \frac{17}{3}$, $y = \frac{23}{3}$)
 and $x = 7$, $y = 5$)
[6 markah]

Jawapan :



MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

5. INDEKS DAN LOGARITMA





$a^n \rightarrow$ indeks / index
 $\rightarrow$ asas / base

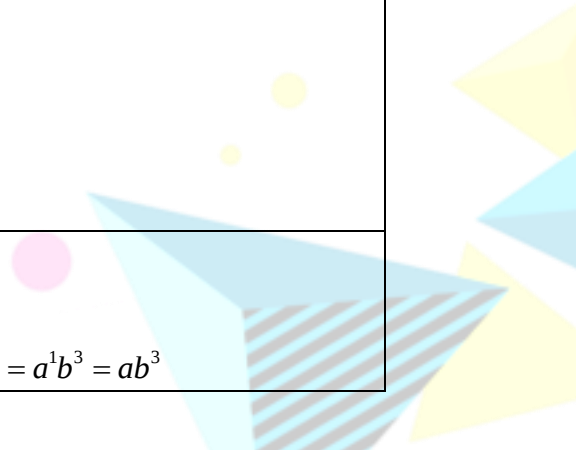
$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ factors}}$$

Contoh:

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$p^7 = p \times p \times p \times p \times p \times p \times p$$

Hukum Indeks	Contoh
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	a) $4^3 \times 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$ b) $x^3 \times x^7 = x^{3+7} = x^{10}$ c) $d^6 \times d^{-5} = d^{6+(-5)} = d^1 = d$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	a) $9^4 \div 9^2 = 9^{4-2} = 9^2$ b) $\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$ c) $d^6 \div d^{-5} = d^{6-(-5)} = d^{11}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	a) $(4^2)^5 = 4^{10}$ b) $(g^2)^3 = g^6$ c) $(a^2b^6)^{\frac{1}{2}} = (a^{2 \times \frac{1}{2}})(b^{6 \times \frac{1}{2}}) = a^1b^3 = ab^3$
$a^n \times b^n = (ab)^n$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	a) $5^2 \times 4^2 = (5 \times 4)^2 = 20^2$ b) $x^3y^3 = (xy)^3$ c) $5^2 \div 4^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$ d) $\frac{x^5}{y^5} = \left(\frac{x}{y}\right)^5$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	a) $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ b) $x^{\frac{3}{4}} = (x^3)^{\frac{1}{4}} = (x^{\frac{1}{4}})^3$ c) $d^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{d^5} = (\sqrt[6]{d})^5$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	a) $7^{-4} = \frac{1}{7^4}$ b) $= x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ c) $d^{-x} = \frac{1}{d^x}$
$a^0 = 1$	a) $8^0 = 1$ b) $g^0 = 1$ c) $(a^2b^6)^{\frac{1}{2}} = (a^{2 \times \frac{1}{2}})(b^{6 \times \frac{1}{2}}) = a^1b^3 = ab^3$



Hubungan antara indeks untuk menyelesaikan persamaan indeks

$$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n.$$

$$a^m = b^m \Leftrightarrow a = b.$$

Logaritma dan Hukum Logaritma

Hubungan antara indeks dan logaritma

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

Hukum Logaritma	Contoh
$\log_a 1 = 0$	a) $\log_x 1 = 0$ b) $\log_5 1 = 0$
$\log_a a = 1$	a) $\log_4 4 = 1$ b) $\log_x x = 1$ c) $\log_{ab} ab = 1$
$\lg y = \log_{10} y$	a) $\log_{10} 4 = \lg 4$ b) $\lg ab = \log_{10} ab$
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	a) $\log_3 12 = \log_3 (4 \times 3) = \log_3 4 + \log_3 3$ b) $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	a) $\log_{10} 1.5 = \log_{10} \frac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$ b) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\log_a x^n = n \log_a x$	a) $\log_x 25 = \log_x 5^2 = 2 \log_x 5$ b) $\log_a y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a y$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	a) $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$ b) $\log_a 14 = \frac{\log_3 14}{\log_3 a}$

Peringatan : $\log_{10} a = \lg a$

Hubungan antara logaritma untuk menyelesaikan persamaan logaritma.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

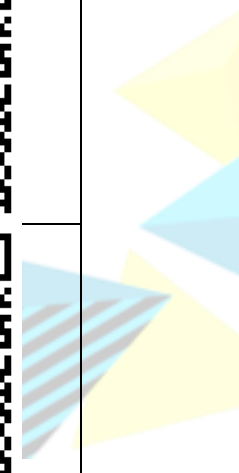
NOTA TAMBAHAN

Pengenalan kepada Nombor Indeks https://www.youtube.com/watch?v=aWAWzyvwMH8&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=1	
Indeks Sifar dan Indeks Negatif https://www.youtube.com/watch?v=C9GEZsFlCAc&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=2	
Indeks Pecahan - Bahagian 1 https://www.youtube.com/watch?v=-ME6Llfggi4&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=3	
Indeks Pecahan - Bahagian 2 https://www.youtube.com/watch?v=VL_qNOixnEk&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=4	
Hukum Indeks - Hasil Darab Nombor Indeks https://www.youtube.com/watch?v=WFkEWwHLLh0&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=5	
Hukum Indeks - Hasil Bahagi Nombor Indeks https://www.youtube.com/watch?v=47r3DvZA-6c&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=6	

Hukum Indeks - Indeks Bagi Hasil Darab/ Bahagi Dua Nombor https://www.youtube.com/watch?v=9f5Dz5hlXxk&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=7	
Hukum-hukum Indeks (Contoh Soalan - Bahagian 1) https://www.youtube.com/watch?v=3qX_JNZrJz0&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=8	
Hukum-hukum Indeks (Contoh Soalan - Bahagian 2) https://www.youtube.com/watch?v=P_N5BOgtyKo&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=9	
Menyelesaikan Persamaan Indeks - Bahagian 1 https://www.youtube.com/watch?v=xK0qc-3wyuk&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=16	
Menyelesaikan Persamaan Indeks - Bahagian 2 https://www.youtube.com/watch?v=GsmFMRB4D9U&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=17	
Menyelesaikan Persamaan Serentak Nombor Indeks https://www.youtube.com/watch?v=HO2TEfWRM4E&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=18	



Hukum Logaritma Pengenalannya kepada Logaritma - Bagian 1 https://www.youtube.com/watch?v=7xGWyLCKGFc&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=10	
Pengenalan kepada Logaritma - Bagian 2 https://www.youtube.com/watch?v=g87-5fZo7o4&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=11	
Hukum-hukum Logaritma (Bagian 1) https://www.youtube.com/watch?v=v1q6Nl2QKoY&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=12	
Mencari Nilai Logaritma - Bagian 1 https://www.youtube.com/watch?v=fySw4JU0l4&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=13	
Menukar Asas Logaritma https://www.youtube.com/watch?v=m6csVN1JmQE&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=14	
Menukar Asas Logaritma - (Contoh Soalan - Bagian 2) https://www.youtube.com/watch?v=Hu_qDUcwfM0&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=15	
Menyelesaikan Persamaan Logaritma - Contoh Soalan (Bagian 1) https://www.youtube.com/watch?v=qItYKucPIRU&list=PLP7MKjUAZ-wvfz38CGOKjcYQasOMnhD2u&index=20	



CONTOH (Indeks)

1. Permudahkan $4^{n+1} \times 2^{n+1} \div 8^{2n-1}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} & 4^{n+1} \times 2^{n+1} \div 8^{2n-1} \\ &= 2^{2(n+1)} \times 2^{n+1} \div 2^{3(2n-1)} \rightarrow (a^m)^n = a^{mn} \\ &= 2^{2(n+1)+n+1-3(2n-1)} \rightarrow a^m \times a^n = a^{m+n} \\ &= 2^{2n+2+n+1-6n+3} \\ &= 2^{-3n+6} \end{aligned}$$

2. Permudahkan $\frac{6^{3n+2} \times 2^{1-3n}}{3^{2+3n}}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{6^{3n+2} \times 2^{1-3n}}{3^{2+3n}} &= \frac{(2 \times 3)^{3n+2} \times 2^{1-3n}}{3^{2+3n}} \\ &= \frac{2^{3n+2} \times 3^{3n+2} \times 2^{1-3n}}{3^{2+3n}} \rightarrow (ab)^n = a^n \times b^n : (6)^{3n+2} = (2 \times 3)^{3n+2} = 2^{3n+2} \times 3^{3n+2} \\ &= 2^{3n+2+1-3n} \times 3^{3n+2-(2+3n)} \rightarrow a^m \times a^n = a^{m+n}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ &= 2^3 \times 3^{3n+2-2-3n} \\ &= 2^3 \times 3^0 \\ &= 8 \end{aligned}$$

3. Tunjukkan bahawa $3^{n+2} - 3^n + 15(3^{n-1})$ boleh dibahagikan tepat dengan 13.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} & 3^{n+2} - 3^n + 15(3^{n-1}) \\ &= 3^n(3^2) - 3^n + 15 \frac{(3^n)}{3} \rightarrow a^{m+n} = a^m \times a^n : 3^{n+2} = 3^n(3^2), \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} : 3^{n-1} = \frac{(3^n)}{3} \\ &= 3^n(3^2) - 3^n + 5(3^n) \\ &= 3^n[3^2 - 1 + 5] \rightarrow \text{factorise } 3^n \\ &= 3^n(13) \end{aligned}$$

$\therefore$ Oleh sebab 13 adalah penggandaan 13, maka $3^{n+2} - 3^n + 15(3^{n-1})$ boleh dibahagikan tepat oleh 13.

4. tunjukan $3^{2x+1} \div (4^{x+1} - 2^{2x}) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$.

Penyelesaian: (L.H.S = Sebelah Tangan Kiri)

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= 3^{2x+1} \div (4^{x+1} - 2^{2x}) \\ &= 3^{2x+1} \div (2^{2x+2} - 2^{2x}) && \rightarrow (a^m)^n = a^{mn} : 2^{2(x+1)} = 2^{2x+2} \\ &= 3^{2x} \times 3 \div (2^{2x} \times 2^2 - 2^{2x}) && \rightarrow a^{m+n} = a^m \times a^n : 3^{2x+1} = 3^{2x} \times 3, 2^{2x+2} = 2^{2x} \times 2^2 \\ &= 3^{2x} (3) \div [2^{2x} (2^2 - 1)] && \rightarrow \text{Faktorkan } 2^{2x} \\ &= 3^{2x} (3) \div 2^{2x} (3) \\ &= \frac{3^{2x} (3)}{2^{2x} (3)} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} && \rightarrow \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \frac{3^{2x}}{2^{2x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \\ &= \text{R.H.S (tertunjuk)} \end{aligned}$$

5. Selesaikan persamaan $243^{4x} = 9^{8x+6}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 243^{4x} &= 9^{8x+6} \\ 3^{5(4x)} &= 3^{2(8x+6)} && \rightarrow (ab)^n = a^n \times b^n \\ 5(4x) &= 2(8x+6) && \rightarrow a^m = a^n \Leftrightarrow m = n \\ 20x &= 16x + 12 \\ 4x &= 12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

6. Selesaikan persamaan $25^x \times 4^{2x} = 400$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 25^x \times 4^{2x} &= 400 \\ 5^{2x} \times 4^{2x} &= 400 \\ (5 \times 4)^{2x} &= 20^2 && \rightarrow a^n \times b^n = (ab)^n \\ 20^{2x} &= 20^2 \\ 2x &= 2 && \rightarrow a^m = a^n \Leftrightarrow m = n \\ x &= 1 \end{aligned}$$

7. Selesaikan persamaan $5^{x^2} - 25^{6-2x} = 0$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 5^{x^2} - 25^{6-2x} &= 0 \\ 5^{x^2} &= 5^{2(6-2x)} && \rightarrow (a^m)^n = a^{mn} \\ x^2 &= 2(6-2x) && \rightarrow a^m = a^n \Leftrightarrow m = n \\ x^2 &= 12 - 4x \\ x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ (x+6)(x-2) &= 0 \\ x &= -6 \text{ or } x = 2 \end{aligned}$$

8. Selesaikan persamaan $3^{x+2} - 3^x = 24$

Penyelesaian:

$$3^{x+2} - 3^x = 24$$

$$3^x(3^2) - 3^x = 24 \quad \rightarrow a^{m+n} = a^m \times a^n$$

$$3^x(3^2 - 1) = 24 \quad \rightarrow \text{faktorkan } 3^x$$

$$3^x(8) = 24$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1 \quad \rightarrow a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$$

9. Diberi $5^a = 11^b = 55^c$, ungkapkan c dalam sebutan a dan b .

Penyelesaian:

$$\text{Biarkan } 5^a = k, \quad 5 = k^{\frac{1}{a}}$$

$$11^b = k, \quad 11 = k^{\frac{1}{b}}$$

$$55^c = k, \quad 55 = k^{\frac{1}{c}}$$

$$55 = 11 \times 5$$

$$k^{\frac{1}{c}} = k^{\frac{1}{a}} \times k^{\frac{1}{b}}$$

$$k^{\frac{1}{c}} = k^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \quad \rightarrow a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \rightarrow a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} \times \frac{b}{b} + \frac{1}{b} \times \frac{a}{a} \quad \rightarrow \text{samakan penyebut}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{b+a}{ab}$$

$$c = \frac{ab}{b+a}$$

CONTOH (Logaritma)

1. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi $\log_4 128 + \log_{m-2} \frac{1}{\sqrt{m-2}}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \log_4 128 + \log_{m-2} \frac{1}{\sqrt{m-2}} &= \frac{\log_2 128}{\log_2 4} + \log_{m-2} \frac{1}{(m-2)^{\frac{1}{2}}} & \rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}: \log_4 128 &= \frac{\log_2 128}{\log_2 4} \\ &= \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^2} + \log_{m-2} (m-2)^{-\frac{1}{2}} & \rightarrow \frac{1}{a^n} = a^{-n}: \frac{1}{(m-2)^{\frac{1}{2}}} &= (m-2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{7 \log_2 2}{2 \log_2 2} - \frac{1}{2} \log_{m-2} (m-2) & \rightarrow \log_a x^n = n \log_a x: \log_2 2^7 &= 7 \log_2 2 \\ &= \frac{7}{2} - \frac{1}{2} & \rightarrow \log_a a = 1: \log_2 2 &= 1, \log_{m-2} (m-2) = 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. Diberi $\log_5 \sqrt{x} = 3$. Cari nilai bagi x .

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \log_5 \sqrt{x} &= 3 \\ \sqrt{x} &= 5^3 \quad \rightarrow \log_a y = x \Leftrightarrow y = a^x \\ (\sqrt{x})^2 &= (5^3)^2 \rightarrow \text{kuasa dua kedua-dua bahagian untuk menghilangkan punca kuasa dua} \\ x &= 15625 \end{aligned}$$

3. Selesaikan persamaan $\log_3(y+1) = 1 + \log_3(y-5)$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \log_3(y+1) &= 1 + \log_3(y-5) \\ \log_3(y+1) &= \log_3 3 + \log_3(y-5) & \rightarrow \log_a a = 1: 1 &= \log_3 3 \\ \log_3(y+1) &= \log_3 3(y-5) & \rightarrow \log_a x + \log_a y = \log_a xy: \log_3 3 + \log_3(y-5) &= \log_3 3(y-5) \\ (y+1) &= 3(y-5) & \rightarrow \log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x &= y \\ y+1 &= 3y-15 \\ 16 &= 2y \\ y &= 8 \end{aligned}$$

4. Cari nilai bagi $3^{2\log_3 4}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Let } 3^{2\log_3 4} &= y \\ 2\log_3 4 &= \log_3 y & \rightarrow y &= a^x \Leftrightarrow \log_a y = x \\ \log_3 4^2 &= \log_3 y & \rightarrow n \log_a x = \log_a x^n: 2\log_3 4 &= \log_3 4^2 \\ 4^2 &= y & \rightarrow \log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x &= y \\ y &= 16 \\ 3^{2\log_3 4} &= 16 \end{aligned}$$

5. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi $2\log_4 8 + 2\log_2 5 - 2 - \log_2 50$

Penyelesaian:

$$2\log_4 8 + 2\log_2 5 - 2 - \log_2 50$$

$$= 2 \frac{\log_2 8}{\log_2 4} + \log_2 5^2 - 2\log_2 2 - \log_2 50 \quad \rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, n \log_a x = \log_a x^n, 1 = \log_a a$$

$$= 2 \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} + \log_2 5^2 - \log_2 2^2 - \log_2 50 \quad \rightarrow n \log_a x = \log_a x^n$$

$$= 2 \frac{\log_2 2^3}{2\log_2 2} + \log_2 5^2 - \log_2 2^2 - \log_2 50$$

$$= \log_2 2^3 + \log_2 5^2 - \log_2 2^2 - \log_2 50$$

$$= \log_2 \left(\frac{8 \times 25}{4 \times 50} \right) \quad \rightarrow \log_a x + \log_a y = \log_a xy, \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$= \log_2 1$$

$$= 0$$

$$\rightarrow \log_a 1 = 0$$

6. Permudahkan $\log_9 x - 4\log_9 \sqrt{y} + \frac{1}{2}$.

Penyelesaian:

$$\log_9 x - 4\log_9 \sqrt{y} + \frac{1}{2}$$

$$= \log_9 x - \log_9 \left(y^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \log_9 9 \quad \rightarrow n \log_a x = \log_a x^n, 1 = \log_a a$$

$$= \log_9 x - \log_9 y + \log_9 9^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow n \log_a x = \log_a x^n$$

$$= \log_9 \left(\frac{3x}{y} \right) \quad \rightarrow \log_a x + \log_a y = \log_a xy, \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

7. Diberi $2\log_4 x - 4\log_{16} y = 3$, ungkapkan x dalam sebutan y .

Penyelesaian:

$$2\log_4 x - 4\log_{16} y = 3$$

$$\log_4 x^2 - 4 \frac{\log_4 y}{\log_4 4^2} = 3$$

$$\log_4 x^2 - 4 \frac{\log_4 y}{2} = 3$$

$$\log_4 x^2 - 2\log_4 y = 3$$

$$\log_4 x^2 - \log_4 y^2 = 3$$

$$\log_4 \frac{x^2}{y^2} = 3$$

$$\frac{x^2}{y^2} = 4^3$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 8^2$$

$$\frac{x}{y} = 8$$

$$\rightarrow n \log_a x = \log_a x^n, \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\rightarrow \log_a x^n = n \log_a x, \log_a a = 1$$

$$\rightarrow n \log_a x = \log_a x^n$$

$$\rightarrow \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$\rightarrow \log_a y = x \Leftrightarrow y = a^x$$

$$\rightarrow \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\rightarrow a^m = b^m \Leftrightarrow a = b$$

8. Diberi $\log_2 3 = 1.585$ dan $\log_2 5 = 2.322$, tanpa menggunakan kalkulator, nilaikan $\log_8 \left(\frac{5}{9}\right)$.

Penyelesaian:

$$\log_8 \left(\frac{5}{9}\right) = \log_8 5 - \log_8 9$$

$$= \frac{\log_2 5}{\log_2 8} - \frac{\log_2 9}{\log_2 8}$$

$$= \frac{\log_2 5}{\log_2 2^3} - \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^3}$$

$$= \frac{\log_2 5}{3} - \frac{2\log_2 3}{3}$$

$$= \frac{2.322 - 2(1.585)}{3}$$

$$= -0.2827$$

$$\rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\rightarrow \log_a x^n = n \log_a x$$

9. Diberi $\log_{10} a = p$, $\log_{10} b = q$ dan $\log_{10} c = r$, ungkapkan $\log_a \left(\frac{1}{bc} \right)$ dalam sebutan p , q dan r .

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \log_a \left(\frac{1}{bc} \right) &= \log_a 1 - \log_a bc & \rightarrow \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\ &= -(\log_a b + \log_a c) & \rightarrow \log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\ &= -\left(\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} c}{\log_{10} a} \right) & \rightarrow \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \\ &= -\left(\frac{q}{p} + \frac{r}{p} \right) \\ &= -\left(\frac{q+r}{p} \right) \\ &= -\frac{q+r}{p} \end{aligned}$$

10. Selesaikan persamaan $\log_3[\log_2(2x-1)] = \log_2 4$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \log_3[\log_2(2x-1)] &= \log_2 4 \\ \log_3[\log_2(2x-1)] &= \log_2 2^2 \\ \log_3[\log_2(2x-1)] &= 2 & \rightarrow \log_a x^n &= n \log_a x, \log_a a = 1 \\ \log_2(2x-1) &= 3^2 & \rightarrow \log_a y = x &\Leftrightarrow y = a^x \\ (2x-1) &= 2^9 & \rightarrow \log_a y = x &\Leftrightarrow y = a^x \\ 2x &= 2^9 + 1 \\ x &= \frac{513}{2} = 256.5 \end{aligned}$$

11. Selesaikan persamaan $4^{2x-3} = 5^x$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 4^{2x-3} &= 5^x \\ \log_{10} 4^{2x-3} &= \log_{10} 5^x & \rightarrow x = y &\Leftrightarrow \log_b x = \log_b y \\ (2x-3)\log_{10} 4 &= x\log_{10} 5 & \rightarrow \log_a x^n &= n \log_a x \\ 2x\log_{10} 4 - 3\log_{10} 4 &= x\log_{10} 5 & \rightarrow \text{Expand} \\ 2x\log_{10} 4 - x\log_{10} 5 &= 3\log_{10} 4 \\ x(2\log_{10} 4 - \log_{10} 5) &= 3\log_{10} 4 \\ x &= \frac{3\log_{10} 4}{2\log_{10} 4 - \log_{10} 5} \\ x &= 3.576 \end{aligned}$$

LATIHAN ASAS

1. Permudahkan ungkapan-ungkapan algebra berikut:

(a) $\frac{5^{3x} \times 5}{5^{-x}}$

(b) $c^4 d^3 \times c^3 d^5$

(c) $(xy^2)^3 \times x^3 y^5$

(d) $(pq^5)^4 \times p^3$

(e) $(7x^{-1})^2 \times (49^{-2} xy)^3$

(f) $(49^{-2} xy)^3 \div (7xy)^{-2}$

2. Permudahkan ungkapan-ungkapan algebra berikut:.

(a) $a^{\frac{1}{3}} \times 2a^{-\frac{1}{2}}$

(b) $\frac{4a^3}{a^{-\frac{3}{5}}}$

(c) $\sqrt[5]{a^7} \times \sqrt[4]{a^{-9}}$

(d) $a^{-\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + 3a^{-\frac{3}{2}} - 3a^{-\frac{5}{2}})$

3. Tukarkan berikut kepada bentuk logaritma.

(a) $3^4 = 81$

(b) $128 = 2^7$

(c) $b^3 = 125$

(d) $6^x = 216$

(e) $3^x = y$

4. Tukarkan berikut kepada bentuk indeks.

(a) $\log_{10} 10000 = 4$

(b) $\log_2 128 = 7$

(c) $\log_x 3 = 4$

(d) $6 = \log_k h$

(e) $\log_2 y = x$

5. Dengan menggunakan kalkulator, cari nilai berikut:

(a) $\log_{10} 9$

(b) $\log_{10} \left(\frac{5}{6}\right)^2$

(c) $\log_2 20$

(d) $\log_4 18$

6. Cari nilai berikut tanpa menggunakan kalkulator.

(a) $\log_2 64$

(b) $\log_{10} 1000$

(c) $\log_4 256$

(d) $\log_3 81$

7. Selesaikan persamaan berikut.

(a) $\log_2 x = 4$

(b) $\log_5 y = 3$

(c) $\log_2 h = 8$

(d) $2\log_3 x = \log_3 4$

8. Cari nilai berikut tanpa menggunakan kalkulator.

(a) $\log_5 750 - \log_5 6$

(b) $\log_3 21 + \log_3 18 - \log_3 14$

(c) $\log_3 8 + 2\log_3 6 - \log_3 \frac{96}{9}$

(d) $2\log_4 2 - \frac{1}{2}\log_4 9 + \log_4 12$

(e) $\log_2 7 + \log_2 12 - \log_2 21$

9. Tulis ungkapan berikut dalam logaritma tunggal.

(a) $\log_2 x + \log_2 y^2$

(b) $\log_b x - 3\log_b y$

(c) $\log_3 x + 3\log_3 y$

(d) $\frac{1}{2}\log_4 x + 2 - 3\log_4 y$

(e) $\log_3 m^4 + 2\log_3 n - \log_3 m$

10. Diberi $\log_2 3 = p$ dan $\log_2 5 = q$, ungkapkan setiap berikut dalam sebutan p dan q

(a) $\log_2 10$

(b) $\log_2 45$

(c) $\log_2 \sqrt{15}$

11. Diberi $\log_3 2 = p$, ungkapkan setiap berikut dalam sebutan p .

(a) $\log_2 9$

(b) $\log_9 8$

(c) $\log_2 18$

(d) $\log_2 \frac{9}{4}$

12. Diberi $\log_2 m = a$ dan $\log_2 n = b$, ungkapkan setiap berikut dalam sebutan a dan b

(a) $\log_4 m^2 n^3$

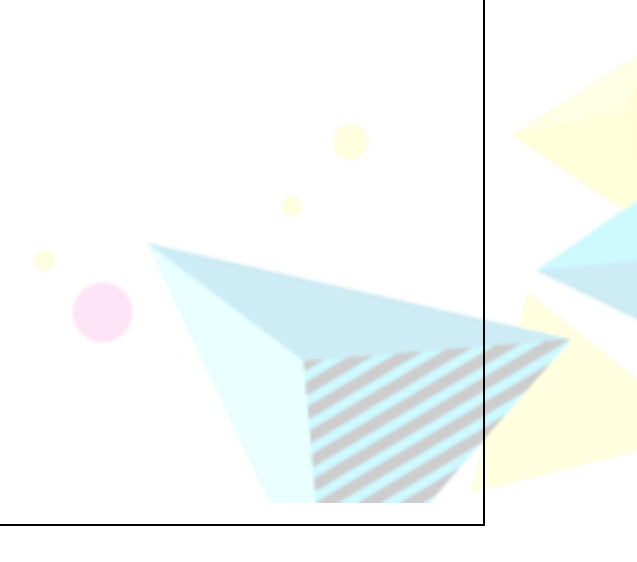
(b) $\log_8 \frac{m}{n^2}$

(c) $\log_{mn} 8n$



LATIHAN FORMAT SPM

1. Permudahkan $2^{n+1} \times 4^n \div 8^{\frac{2}{3}n}$	2. Permudahkan $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^3 \left(\frac{9y^2}{4x^3}\right)^2$
3. Permudahkan $2^{n+3} - 2^{n+2} - 2^n$ dalam bentuk $k(2^n)$, di mana k adalah pemalar.	4. Permudahkan $3^{n+1} + 3^n + 9(3^{n-2})$ dalam bentuk $k(3^n)$, di mana k adalah pemalar.
5. Selesaikan persamaan $\frac{t^{\frac{1}{5}}}{3} = \frac{9}{t^{\frac{4}{5}}}$.	6. Selesaikan persamaan $3^{x+2} - 3^x = 24$.



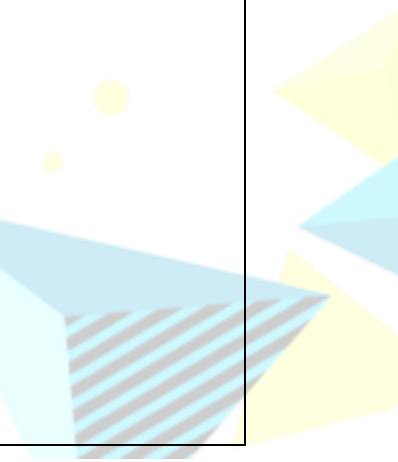


7. Selesaikan persamaan $25(5^{x-1}) - 5^x = 100$.	8. Diberi $9(3^{n-1}) = 27^n$, cari nilai bagi n .
9. Selesaikan persamaan: $2^{3x} = 8 + 2^{3x-1}$.	10. Diberi $\frac{25^{h+3}}{125^{p-1}} = 1$, ungkapkan p dalam sebutan h .
11. Diberi $3^p = 5^q = 15^r$, ungkapkan r dalam sebutan p dan q .	12. Diberi $m = 3^a$ dan $n = 3^b$, ungkapkan $\log_3\left(\frac{mn^4}{27}\right)$ dalam bentuk a dan b .





13. Selesaikan persamaan $5^x = 3^{2x-1}$, berikan jawapan anda dalam 2 tempat perpuluhan.	14. Diberi $\log_5 2 = m$ dan $\log_5 7 = p$, ungkapkan $\log_5 2.45$ dalam sebutan m dan p .
15. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi $\frac{\log_4 5 \times \log_5 6 \times \log_6 7}{\log_8 7}$	16. Selesaikan persamaan $\log_3(y+2) = 1 + \log_3(y-4)$.
17. (a) Diberi $h = 3^p$ dan $k = 2^q$, ungkapkan $\log_8 k^2 - \log_9 \sqrt[3]{h}$ dalam sebutan p dan q .	(b) Selesaikan persamaan berikut: $\log_3[\log_3(80x+3)] = \log_4 16$

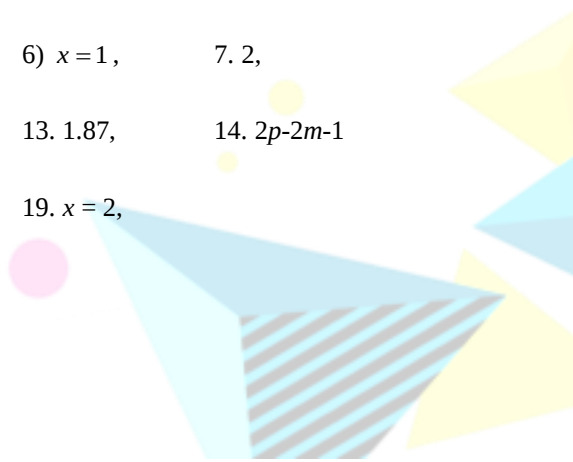




18. Diberi $\log_{27}(x+2) = \log_3 6$, cari nilai bagi x .	19. Selesaikan persamaan: $\log_x 8 + \frac{1}{3} \log_{\sqrt{x}} 8 = 5$
20. Diberi $\log_a 5 = p$, ungkapkan dalam bentuk p : (a) $\log_a 25$ (b) $\log_5 125a^4$	21. Diberi $\log_3 2 = 0.631$ dan $\log_3 5 = 1.465$, cari nilai berikut tanpa menggunakan kalkulator saintifik. (a) $\log_3 1.5$ (b) $\log_5 50$

Jawapan:

1. $2^{(n+1)}$, 2. $\frac{3y}{2}$, 3. $3(2^n)$, 4. $5(3^n)$, 5. $\frac{1}{243}$, 6) $x=1$, 7. 2,
8. $\frac{1}{2}$, 9. $4/3$ 10. $p = \frac{2h+9}{3}$, 11. $r = \frac{pq}{p+q}$ 12. $a+4b-3$ 13. 1.87, 14. $2p-2m-1$
15. 1.5, 16. $y=7$, 17.(a) $\frac{2}{3}q - \frac{1}{6}p$ (b) $x=246$, 18. $x=214$, 19. $x=2$,
20. (a) $2p$ (b) $\frac{3p+4}{p}$ 21. (a) 0.369 (b) 2.431





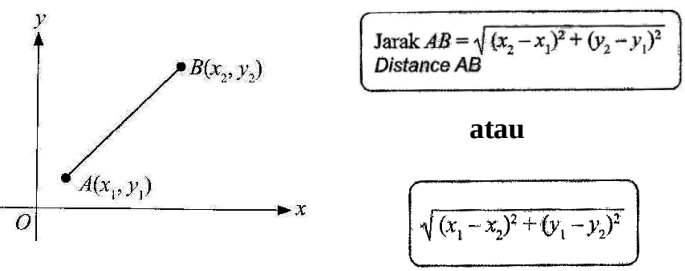
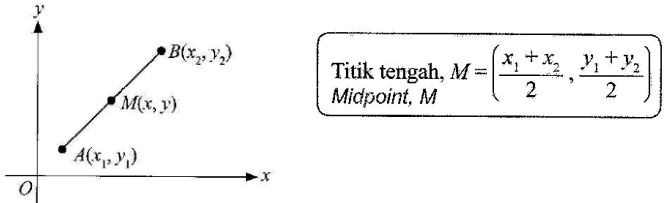
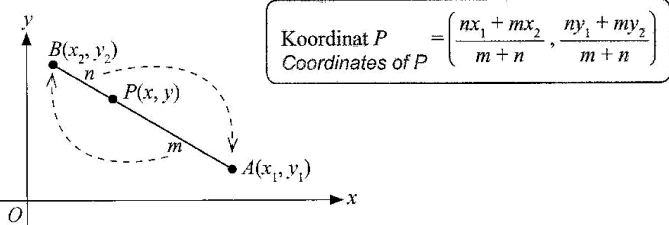
MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

6. GEOMETRI KOORDINAT

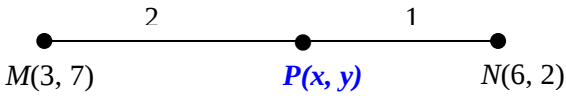


NOTA DAN CONTOH

6.1: JARAK ANTARA DUA TITIK	6.2: PEMBAHAGIAN TEMBERENG
 Jarak $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Distance AB atau $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	(a) Titik tengah  Titik tengah, $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ Midpoint, M (b) Pembahagian tembereng garis dengan nisbah m:n  Koordinat $P = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \right)$ Coordinates of P

CONTOH DAN LATIHAN	
1. <u>Contoh</u> : (x_1, y_1) ↓ ↓ (x_2, y_2) ↓ ↓ Diberi dua titik $A(2, 3)$ dan $B(4, 7)$. Cari jarak antara titik tersebut. Jarak $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (7-3)^2}$ $= \sqrt{4+16}$ $= \sqrt{20}$ unit.	2 Diberi dua titik $X(-4, -1)$ dan $Y(-2, 1)$. Cari jarak antara titik tersebut. [$\sqrt{8}$]
3 <u>Contoh</u> : Jarak di antara dua titik $A(1, 3)$ dan $B(4, k)$ ialah 5 unit. Cari nilai-nilai yang mungkin bagi k. $\sqrt{(4-1)^2 + (k-3)^2} = 5$ $9 + k^2 - 6k + 9 = 25$ $k^2 - 6k - 7 = 0$ $(k-7)(k+1) = 0$ $k = 7$ atau $k = -1$	4 Jarak di antara dua titik $P(-1, 3)$ dan $Q(5, k)$ ialah 10 unit. Cari nilai-nilai yang mungkin bagi k. [11, -5]



5	<u>Contoh</u> : $\begin{matrix} \Psi \Psi \\ P(3, 2) \end{matrix}$ dan $\begin{matrix} \Psi \Psi \\ Q(5, 7) \end{matrix}$ Titik Tengah, $M = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+7}{2} \right)$ $= \left(4, \frac{9}{2} \right)$	6	3. $P(0, -1)$, dan $Q(-1, -5)$ $(-\frac{1}{2}, -3)$
7	<u>Contoh</u> : Titik P membahagi dalam satu tembereng garis yang menghubungkan titik $M(3, 7)$ dan $N(6, 2)$ dalam nisbah $2 : 1$. Cari koordinat titik P.  $P = \left(\frac{1(3) + 2(6)}{2 + 1}, \frac{1(7) + 2(2)}{2 + 1} \right)$ $= \left(\frac{15}{3}, \frac{11}{3} \right)$ $= \left(5, \frac{11}{3} \right)$	8	Titik P membahagi dalam satu tembereng garis yang menghubungkan titik $M(4, 5)$ dan $N(-8, -5)$ dalam nisbah $1 : 3$. Cari koordinat titik P. $\left(1, \frac{5}{2} \right)$



6.3: LUAS POLIGON

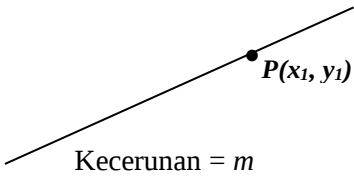
$$\begin{aligned} \text{Luas } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \\ \text{Area of } \triangle ABC &= \frac{1}{2} |(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)| \end{aligned}$$

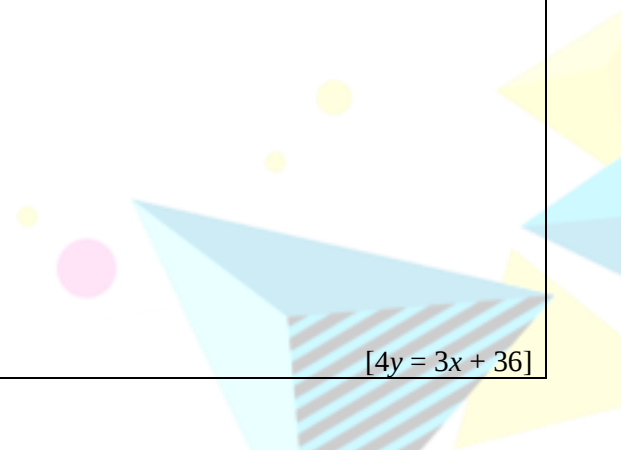
CONTOH DAN LATIHAN

1 <u>Contoh :</u> Cari luas bagi segitiga berikut : $P(0, 1)$, $Q(1, -3)$ dan $R(2, 5)$ Luas $\triangle PQR$ $= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $= \frac{1}{2} (0 \times -3) + (1 \times 5) + (2 \times 1) - (1 \times 1) - (2 \times -3) - (0 \times 5) $ $= \frac{1}{2} 0 + 5 + 2 - 1 + 6 - 0 $ $= \frac{1}{2} 12 $ $= 6 \text{ unit}^2$	2 Cari luas bagi segitiga berikut : $P(2, 6)$, $Q(6, 1)$ dan $R(-1, -7)$ $\left[33\frac{1}{2} \text{ unit}^2 \right]$
3 <u>Contoh :</u> Bucu-bucu sebuah segitiga $A(5, 2)$, $B(4, 6)$ dan $C(p, -2)$. Diberi luas segitiga ialah 30 unit^2, cari nilai-nilai p. $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 4 & p & 5 \\ 2 & 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \pm 30$ $\frac{1}{2} 30 + (-8) + 2p - 8 - 6p - (-10) = \pm 30$ $ 24 - 4p = \pm 60$ $24 - 4p = 60 \quad \text{or} \quad 24 - 4p = -60$ $-4p = 36 \quad \quad \quad -4p = -84$ $p = -9 \quad \quad \quad p = 21$	4 Titik-titik $(0, 3)$, $(2, t)$ dan $(-2, -1)$ adalah bucu-bucu sebuah segitiga. Diberi luas segitiga itu ialah 4 unit^2, cari nilai-nilai bagi t. $[t = 11, 3]$



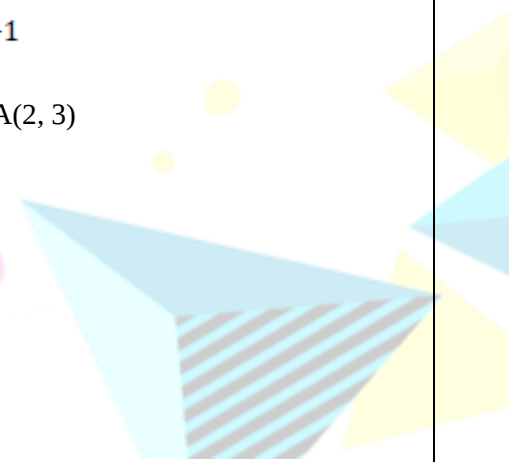
6.4: PERSAMAAN GARIS LURUS

1	Rumus kecerunan: i) $\text{Kecerunan} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ii) $\text{Kecerunan} = - \frac{\text{pintasan} - y}{\text{Pintasan} - x}$	2	Persamaan garis lurus boleh dinyatakan dalam bentuk berikut : i) Bentuk am : $ax^2 + bx + c$ ii) Bentuk kecerunan : $y = mx + c$; $m = \text{kecerunan}$, $c = \text{pintasan-}y$ iii) Bentuk pintasan : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a = \text{pintasan-}x$, $b = \text{pintasan-}y$
3.	Persamaan garis lurus boleh diperoleh dengan dua kaedah. i) Kaedah 1: $y - y_1 = m(x - x_1)$ ii) Kaedah 2: $y = mx + c$		
	i) <u>Kaedah 1:</u> Jika diberi kecerunan dan satu titik. $y - y_1 = m(x - x_1)$  Kecerunan = m		<i>Contoh :</i> Cari persamaan garis lurus yang melalui titik (2, -3) dan mempunyai kecerunan 4. $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - (-3) = 4(x - 2)$ $y + 3 = 4x - 8$ $y = 4x - 8 - 3$ $y = 4x - 11$
1	Cari persamaan garis lurus yang melalui titik (5, 2) dan mempunyai kecerunan -2. [$y = -2x + 12$]	2	Cari persamaan garis lurus yang melalui titik (-8, 3) dan mempunyai kecerunan $\frac{3}{4}$. [$4y = 3x + 36$]





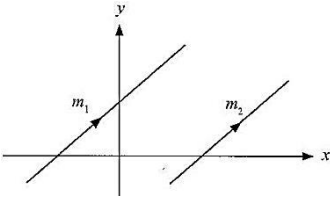
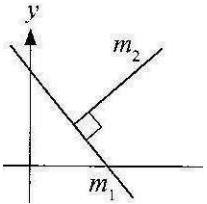
	ii) <u>Kaedah 2:</u> Jika satu garis lurus berkecerunan m dan pintasan-y, c; maka persamaan garis lurus ialah $y = mx + c$	<u>Contoh :</u> Cari persamaan garis lurus yang melalui titik (2, -3) dan mempunyai kecerunan 4. $m = 4; (2, -3)$ $y = mx + c$ $-3 = 4(2) + c$ $-3 = 8 + c$ $8 + c = -3$ $c = -3 - 8$ $c = -11$ $y = 4x - 11$	
1	Cari persamaan garis lurus yang melalui titik (5, 2) dan mempunyai kecerunan -2. $[y = -2x + 12]$	2	Cari persamaan garis lurus yang melalui titik (-8, 3) dan mempunyai kecerunan $\frac{3}{4}$. $[4y = 3x + 36]$
4.	3 BENTUK PERSAMAAN GARIS LURUS; (a) Bentuk Kecerunan, $y = mx + c$ dengan keadaan m =keceruan, c = pintasan-y. (b) Bentuk Am $ax + by + c = 0$ dengan keadaan a, b dan c adalah pemelar. (c) Bentuk pintasan, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ dengan keadaan a =pintasan-x; b =pintasan-y	(a) Bentuk kecerunan; <u>Contoh:</u> Cari persamaan garis lurus yang melalui titik A(2, 3) dan B(-1, 6). $m_{AB} = \frac{6 - 3}{-1 - 2} = -1$ $y - y_1 = mx + c; A(2, 3)$ $y - 3 = -1(x - 2)$ $y - (3) = -1(x - 2)$ $y - 3 = -x + 2$ $y = -x + 5$	



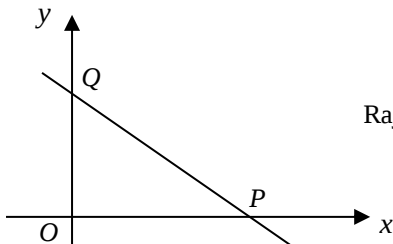
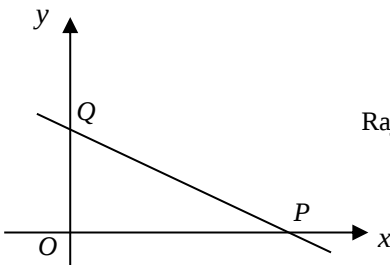


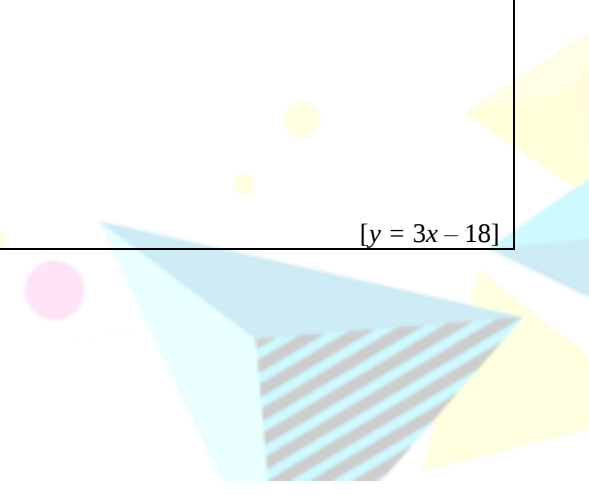
	(b) Bentuk Am; <u>Contoh:</u> Cari persamaan garis lurus yang melalui titik A(2, 3) dan B(-1, 6). $m_{AB} = \frac{6 - 3}{-1 - 2} = -1$ $y - y_1 = mx + c; A(2, 3)$ $y - 3 = -1(x - 2)$ $y - (3) = -1(x - 2)$ $y - 3 = -x + 2$ $y + x - 5 = 0$	(c) Bentuk Pintasan; <u>Contoh:</u> Cari persamaan garis lurus yang melalui titik A(2, 3) dan B(-1, 6). $m_{AB} = \frac{6 - 3}{-1 - 2} = -1$ $y - y_1 = mx + c; A(2, 3)$ $y - 3 = -1(x - 2)$ $y - (3) = -1(x - 2)$ $y - 3 = -x + 2$ $(y + x = -5) \div 5$ $\frac{y}{5} + \frac{x}{5} = \frac{5}{5}$ $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$	
1	Soalan: (a) Bentuk kecerunan; Cari persamaan garis lurus yang melalui titik T(3, 4) dan U(7, 12). $[y = 2x - 2]$	2	(b) Bentuk Am; Cari persamaan garis lurus yang melalui titik T(3, 4) dan U(7, 12). $[y - 2x + 2 + 0]$
3	(c) Bentuk Pintasan Cari persamaan garis lurus yang melalui titik T(3, 4) dan U(7, 12). $[\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} = 1]$		



6.5	GARIS SELARI DAN GARIS SERENJANG	
(a)	<u>Garis Selari</u>  Dua garis adalah selari jika, $m_1 = m_2$	<i>Contoh :</i> Tentukan sama ada setiap pasangan garis lurus yang berikut adalah selari atau tidak. $y = 3x - 2$ dan $3x - y = 4$ $y = 3x - 2 ,$ $m_1 = 3$ $3x - y = 4$ $y = 3x - 4 ,$ $m_2 = 3$ Oleh sebab $m_1 = m_2$, $\therefore$ dua garis adalah selari.
	1) Tentukan sama ada setiap pasangan garis lurus yang berikut adalah selari atau tidak. $y = 2x + 5$ and $4x + 2y = 9$ [N]	2) Tentukan sama ada setiap pasangan garis lurus yang berikut adalah selari atau tidak. $6y = 2 - 3x$ and $\frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 4$ [Y]
(b)	<u>Garis serenjang</u>  Dua garis adalah serenjang jika $m_1 \times m_2 = -1$	<i>Contoh :</i> Tentukan sama ada setiap pasangan garis lurus yang berikut adalah berserenjang atau tidak. $y = 3x - 2$ dan $x + 3y = 4$ $y = 3x - 2 ,$ $m_1 = 3$ $x + 3y = 4$ $3y = -x + 4$ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} ,$ $m_2 = -\frac{1}{3}$ Oleh sebab $m_1 \times m_2 = 3 \times -\frac{1}{3} = -1$, $\therefore$ dua garis lurus adalah berserenjang.

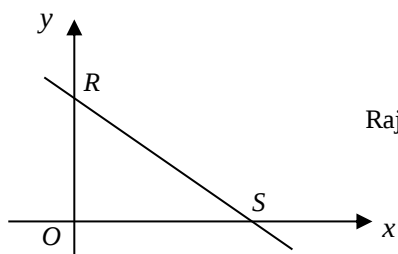


1) Tentukan sama ada setiap pasangan garis lurus yang berikut adalah berserenjang atau tidak. $y = 2x + 5$ and $4x + 2y = 9$ [T]	2) Tentukan sama ada setiap pasangan garis lurus yang berikut adalah berserenjang atau tidak. $6y = 2 - 3x$ and $\frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 4$ [Y]
<i>Contoh :</i> Rajah 1 menunjukkan garis lurus PQ yang mempunyai persamaan $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Carikan persamaan garis lurus yang berserenjang dengan PQ dan melalui titik Q. (SPM 2004)  Rajah 1 <i>Jawapan :</i> $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ Kecerunan PQ, $m_1 = -\frac{3}{2}$, so $m_2 = \frac{2}{3}$ Koordinat $Q (0, 3)$ $\therefore$ Persamaan garis lurus yang berserenjang dengan PQ dan melalui titik Q: $y - 3 = \frac{2}{3}(x - 0)$ $y = \frac{2}{3}x + 3$	1 Rajah 2 menunjukkan garis lurus PQ yang mempunyai persamaan $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$. Carikan persamaan garis lurus yang berserenjang dengan PQ dan melalui titik P.  Rajah 2 <i>Jawapan:</i> [y = 3x - 18]



2

Rajah 3 menunjukkan garis lurus RS yang mempunyai persamaan $x + 2y = 6$.
Carikan persamaan garis lurus yang berserenjang dengan RS dan melalui titik S .



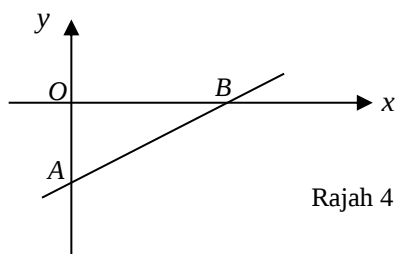
Rajah 3

Jawapan :

$$[y = 2x + 3]$$

3

Rajah 4 menunjukkan garis lurus AB yang mempunyai persamaan $2x - 3y = 6$.
Carikan persamaan garis lurus yang berserenjang dengan AB dan melalui titik B .



Rajah 4

Jawapan :

$$[y = -\frac{3}{2}x - 2]$$



6.6 PERSAMAAN LOKUS		
i)	Rumus: $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ x_1 dan y_1 adalah titik koordinat.	<u>Kes 1:</u> <i>Contoh:</i> Cari persamaan lokus bagi titik P yang bergerak supaya jaraknya dari titik $A(-4, 9)$ sentiasa 5 unit. Katakan titik $P(x, y)$ $PA = 5$ $\sqrt{(x + 4)^2 + (y - 9)^2} = 5$ Kuasaduakan kedua-dua belah persamaan untuk menghapuskan punca kuasa dua, $(x + 4)^2 + (y - 9)^2 = 25$ $x^2 + 8x + 16 + y^2 - 18y + 81 - 25 = 0$ $x^2 + y^2 + 8x - 18y + 72 = 0$
ii)	Terdapat 2 kes iaitu; <u>Kes 1:</u> Lokus bagi satu titik yang bergerak dengan keadaan jaraknya dari satu titik tetap adalah suatu pemalar. <u>Kes 2:</u> Lokus bagi satu titik yang bergerak dengan keadaan nisbah jarak dari dua titik tetap adalah satu pemalar. <u>Kes 3:</u> Lokus bagi satu titik yang bergerak di mana jaraknya dari A dan B adalah dalam nisbah $m:n$	
1	Soalan: Cari persamaan lokus bagi titik P yang bergerak supaya jaraknya dari titik $A(2, 3)$ sentiasa 5 unit. $[x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0]$	2 Cari persamaan lokus bagi titik P yang bergerak supaya jaraknya dari titik $A(-3, 2)$ sentiasa 3 unit. $[x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0]$

Kes 2:

Contoh:

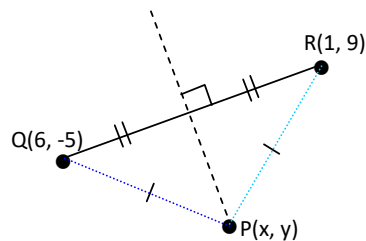
Cari persamaan lokus bagi titik bergerak P dimana jarak P dari titik $Q(6, -5)$ dan $R(1, 9)$ adalah sama.

Katakan $P = (x, y)$,

$$PQ = PR$$
$$\sqrt{(x-6)^2 + (y-(-5))^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-9)^2}$$

Kuasaduakan kedua-dua belah persamaan untuk menghapuskan punca kuasa dua,

$$(x-6)^2 + (y+5)^2 = (x-1)^2 + (y-9)^2$$
$$x^2 - 12x + 36 + y^2 + 10y + 25 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 18y + 81$$
$$10x - 28y + 21 = 0$$



1	Soalan: Cari persamaan lokus bagi titik bergerak P dimana jarak P dari titik $Q(2, 5)$ dan $R(4, 2)$ adalah sama. [4x - 6y + 9 = 0]	2	Cari persamaan lokus bagi titik bergerak P dimana jarak P dari titik $Q(2, -3)$ dan $R(-4, 5)$ adalah sama. [3x - 4y + 7 = 0]
---	--	---	---

Kes 3:

(Nota : Lakar rajah untuk membantu anda menggunakan formula jarak dengan betul.)

Contoh :

Suatu titik P bergerak dengan keadaan jaraknya dari titik A(-2, 3) dan B(4, 8) adalah dalam nisbah 1 : 2. Cari persamaan lokus titik P.

A(-2, 3), B(4, 8) dan $m : n = 1 : 2$

Katakan $P = (x, y)$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{1}{2}$$

$$2PA = PB$$

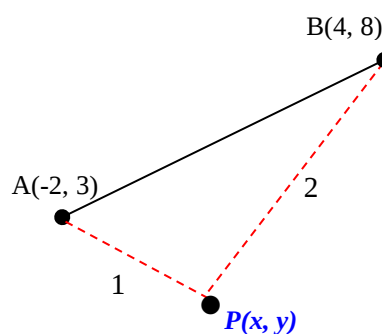
$$2\sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 8)^2}$$

$$(2)^2 \left(\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} \right)^2 = (x - 4)^2 + (y - 8)^2$$

$$4[(x + 2)^2 + (y - 3)^2] = (x - 4)^2 + (y - 8)^2$$

$$4x^2 + 16x + 16 + 4y^2 - 24y + 36 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 16y + 64$$

$$3x^2 + 3y^2 + 24x - 8y - 28 = 0$$



Soalan:

1

Suatu titik P bergerak dengan keadaan jaraknya dari titik A(1, 5) dan B(4, 2) adalah dalam nisbah 2 : 1.

Cari persamaan lokus titik P.

A(1, 5), B(4, 2) dan $m : n = 2 : 1$

$$[x^2 + y^2 - 10x - 2y + 19 = 0]$$

2

Suatu titik P bergerak dengan keadaan jaraknya dari titik A(1, 3) dan B(-2, 6) adalah dalam nisbah 1 : 2. Cari persamaan lokus titik P.

A(1, 3), B(-2, 6) dan $m : n = 1 : 2$

$$[x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0]$$



NOTA TAMBAHAN

QR CODE /	LINK VIDEO
	https://youtu.be/IryKqz_85ys
	https://youtu.be/NJKYFfeT40E
	https://youtu.be/mvkpmuSJ4Q8



LATIHAN TAMBAHAN: SOALAN BERFORMAT SPM (Kertas 1)

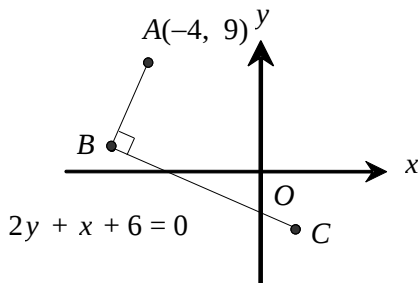
1	Persamaan dua garis lurus adalah $\frac{y}{5} + \frac{x}{3} = 1$ dan $5y = 3x + 24$. Tentukan sama ada kedua-dua garis lurus itu berserenjang antara satu sama lain. (2003) [Y]	2	Persamaan dua garis lurus adalah $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4$ dan $3y = 2x + 6$. Tentukan sama ada kedua-dua garis lurus itu berserenjang antara satu sama lain. [N]
3	Maklumat berikut adalah berkaitan dengan persamaan dua garis lurus, JK dan RT, yang berserenjang antara satu sama lain. (2005) $\begin{aligned} JK &: y = px + k \\ RT &: y = (k - 2)x + p \end{aligned}$ dengan keadaan p and k adalah pemalar. Ungkapkan p dalam sebutan k. $\left[p = -\frac{1}{2-k} \right]$	4	Maklumat berikut adalah berkaitan dengan persamaan dua garis lurus, PQ dan RS, yang berserenjang antara satu sama lain. $\begin{aligned} PQ &: px + y = k \\ RS &: y = (2k - 1)x + p \end{aligned}$ dengan keadaan p and k adalah pemalar. Ungkapkan p dalam sebutan k. $\left[p = \frac{1}{2k-1} \right]$

LATIHAN TAMBAHAN : SOALAN BERFORMAT SPM (Kertas 2)

SPM 2005

Contoh:

Dalam rajah, $\angle ABC = 90^\circ$ dan persamaan garis lurus BC ialah $2y + x + 6 = 0$

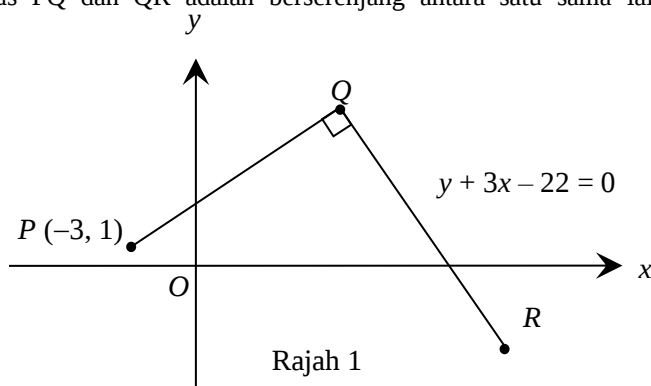


- (a) Carikan
- (i) persamaan garis lurus AB , [2 markah]
- (ii) koordinat B . [3 markah]
- (b) Garis lurus AB dipanjangkan ke suatu titik D dengan keadaan $AB : BD = 2 : 3$. Cari koordinat D . [2 markah]
- (c) Suatu titik P bergerak dengan keadaan jaraknya dari titik A adalah sentiasa 5 unit. Carikan persamaan lokus bagi P . [3 markah]

Jawapan:

- (a) (i) $2y = -x - 6$
 $y = -\frac{1}{2}x - 3$
 $m_1 = -\frac{1}{2}$
 $m_2 = 2$
 Persamaan AB : $y - 9 = 2(x + 4)$
 $y = 2x + 8 + 9$
 $y = 2x + 17$
- (ii) $y = 2x + 17$ (1)
 $2y + x + 6 = 0$ (2)
 Gantikan (1) ke dalam (2);
 $2(2x + 17) + x + 6 = 0$
 $5x = -40$
 $x = -8$
 Gantikan $x = -8$ ke dalam (1);
 $y = 2(-8) + 17$
 $y = 1$ $\therefore$ koordinat $B = (-8, 1)$
- (b) $\frac{2(x) + 3(-4)}{5} = -8$, $\frac{2(y) + 3(9)}{5} = 1$
 $2x - 12 = -40$ $2y + 27 = 5$
 $x = -14$ $y = -11$
 $\therefore$ koordinat $D = (-14, -11)$
- (c) $\sqrt{(x - 9)^2 + (y + 4)^2} = 5$
 $x^2 - 18x + 81 + y^2 + 8y + 16 - 25 = 0$
 $x^2 + y^2 - 18x + 8y + 72 = 0$

- 1 Dalam Rajah 1, garis lurus PQ dan QR adalah berserenjang antara satu sama lain. Persamaan garis lurus QR ialah $y + 3x - 22 = 0$.

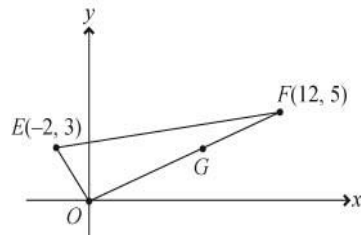


- (a) Cari
- persamaan garis lurus PQ.
 - koordinat titik Q.
- [6 markah]
- (b) Garis lurus PQ dipanjangkan ke titik S dengan keadaan $PQ : QS = 3 : 2$. Cari koordinat titik S.
- [2 markah]
- (c) Titik T bergerak dengan keadaan jaraknya dari titik P sentiasa 3 unit. Cari persamaan lokus bagi titik T.
- [2 markah]

Jawapan :

(a) (i) $y = \frac{1}{3}x + 2$
(ii) $Q(6, 4)$
(b) $S = (12, 6)$
 $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$

2



Rajah 2

Rajah 2 menunjukkan sebuah segitiga OEF di mana O ialah titik asalan. Titik G terletak pada garis OF.

- (a) Hitungkan luas, dalam unit², segitiga OEF.
- (b) Diberi $OG : GF = 3 : 2$, cari koordinat bagi G.
- (c) Titik W bergerak dengan keadaan jaraknya dari F sentiasa dua kali jaraknya dari E.
 - (i) Cari persamaan lokus bagi titik W.
 - (ii) Tentukan ada atau tidak lokus itu berpintas dengan paksi-y.

[10 markah]

Jawapan :

(a) 23 units

(b) $\left(\frac{36}{5}, 3\right)$ (c) (i) $3x^2 + 3y^2 + 40x - 14y - 117 = 0$

(ii) lokus bagi titik w bersilang paksi-y.



MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

7. PEMBEZAAN



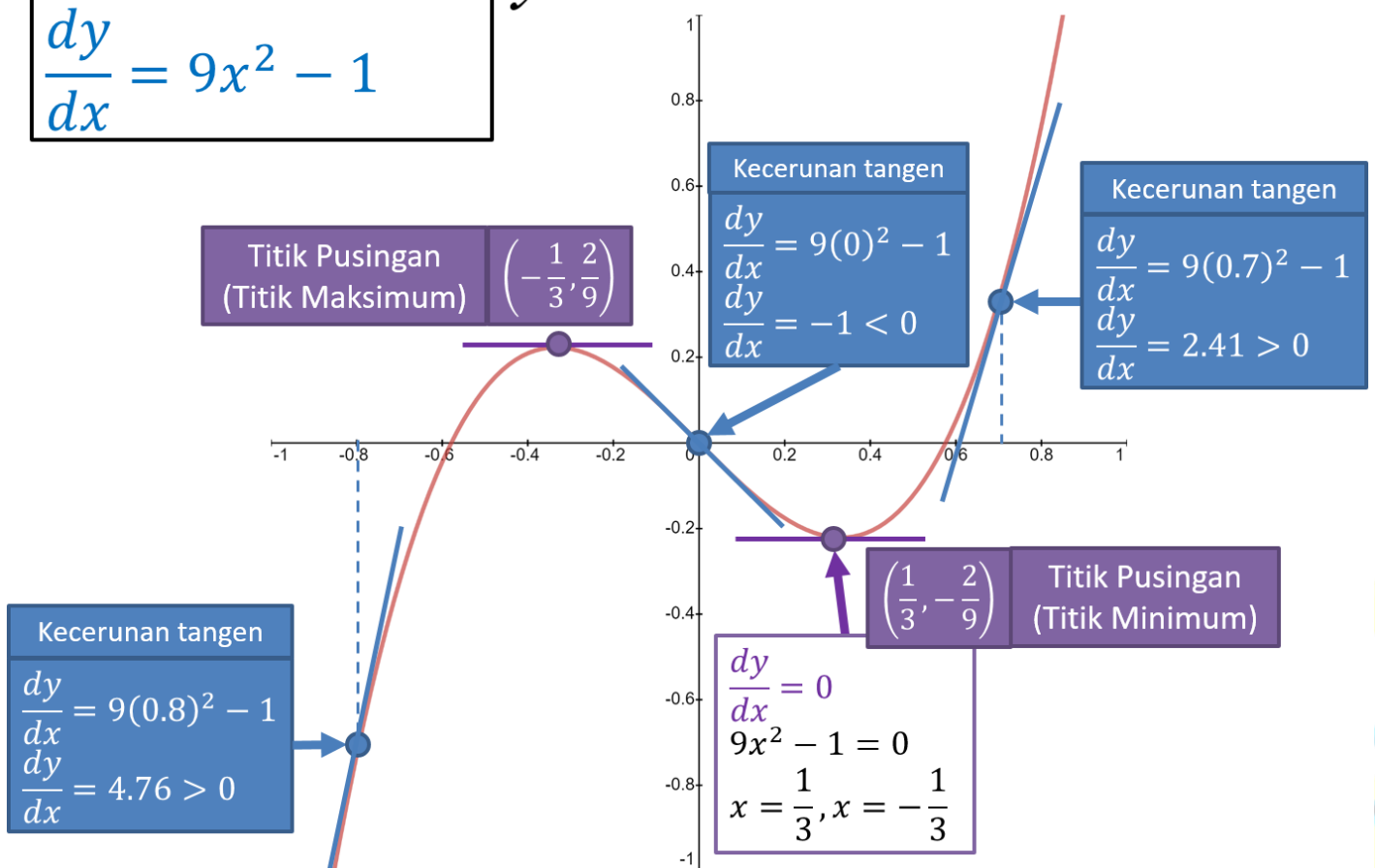
NOTA

$\frac{d}{dx}(y)$ Membezakan y terhadap x	Terbitan Pertama	$\frac{d}{dx}(y)$ Membezakan y terhadap x	Terbitan Pertama
	$\frac{d}{dx}(1) = 0$		$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$
	$\frac{d}{dx}(5) = 0$		$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$
	$\frac{d}{dx}(m) = 0$		$\frac{d}{dx}(3x^4) = 3 \cdot \frac{d}{dx}(x^4)$
	$\frac{d}{dx}(x) = 1$		$= 3(4x^3)$
	$\frac{d}{dx}(5x) = 5$		$= 12x^3$
	$\frac{d}{dx}(mx) = m$		$\frac{d}{dx}(mx^n) = m \cdot \frac{d}{dx}(x^n)$
	$\frac{d}{dm}(mx) = x$		$= m(nx^{n-1})$
			$= mn x^{n-1}$
			$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1})$
			$= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
			$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2}\right) = 3 \cdot \frac{d}{dx}(x^{-2})$
			$= 3(-2x^{-3}) = -\frac{6}{x^3}$
			$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x^3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}(x^{-3})$
			$= \frac{1}{2}(-3x^{-4}) = -\frac{3}{2x^4}$
			$\frac{d}{dx}\left(-\frac{n}{mx^m}\right) = -\frac{n}{m} \cdot \frac{d}{dx}(x^{-m})$
			$= -\frac{n}{m}(-mx^{-m-1})$
			$= \frac{n}{x^{m+1}}$

Terbitan Pertama (Fungsi kecerunan)

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 1$$

$$y = 3x^3 - x$$



Cari terbitan pertama bagi $y = 3x^3 - x$

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(3x^3 - x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\color{red}{3}x^{3-\color{green}{1}}) - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 1$$

Fungsi
kecerunan

Cari terbitan kedua bagi $y = 3x^3 - x$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(9x^2 - 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9(\color{red}{2}x^{2-\color{green}{1}}) = 18x$$

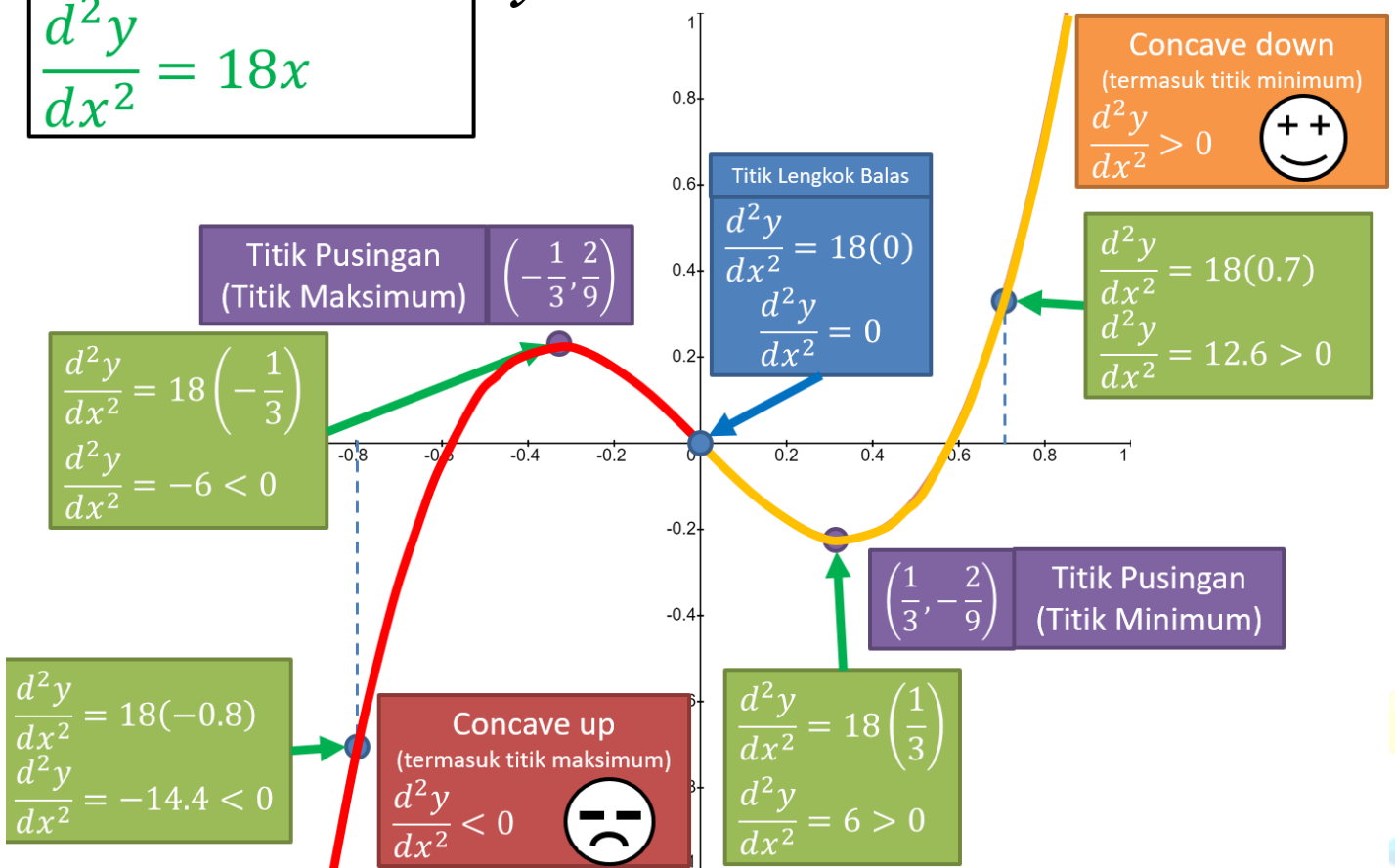
Menentukan
bentuk graf

Terbitan Kedua

(menentukan bentuk graf)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18x$$

$$y = 3x^3 - x$$



Cari turunan pertama bagi $f(x) = 3(2x - 1)^2$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(3(2x - 1)^2)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 3[2(2x - 1)^{2-1}] \times 2$$

$$f'(x) = 12(2x - 1)$$

Fungsi kecerunan

TITIK MAKSIMUM/ MINIMUM

$$f'(x) = 24x - 12$$

$$f''(x) = 18x$$

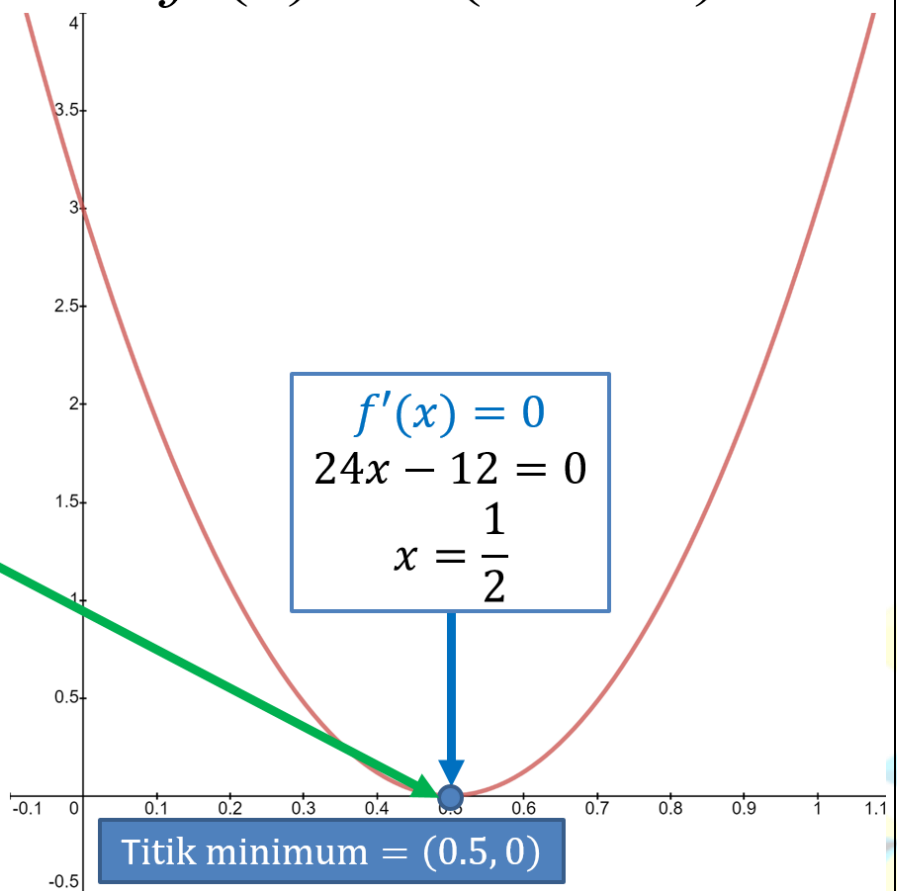
$$f(x) = 3(2x - 1)^2$$

$$f''(x) = 18(0.5) = 9$$

$$f''(x) > 0$$



$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 24x - 12 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Cari terbitan pertama bagi $y = 3x(2x - 1)^2$

$$\begin{matrix} u & v \end{matrix}$$

Hukum
Darab

$$u = 3x, \quad v = (2x - 1)^2$$

$$\frac{du}{dx} = 3, \quad \frac{dv}{dx} = 4(2x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 1)^2(3) + (3x)(4(2x - 1))$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x - 1)(6x - 1)$$

Cari terbitan pertama bagi

$$f(x) = \frac{3x}{(2x - 1)^2}$$

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$$

Hukum
Bahagi

$$u = 3x, \quad v = (2x - 1)^2$$

$$\frac{du}{dx} = 3, \quad \frac{dv}{dx} = 4(2x - 1)$$

$$f'(x) = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)^2(3) - (3x)(4(2x-1))}{((2x-1)^2)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{3(2x + 1)}{(2x - 1)^3}$$

3 pemboleh ubah: V, r, t Kadar Perubahan (Petua Rantai)

V

+ve

$$\frac{dV}{dt} = +12.8\pi$$

Isipadu suatu sfera bertambah pada ketika kadar perubahan $12.8\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

r

+ve

Cari jejari sfera pada ketika jejari bertambah pada kadar 0.2 cm s^{-1} .

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = +0.2$$

$$12.8\pi = 4\pi r^2 \times 0.2$$

$$r^2 = 16 \quad | \quad r = 4$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

3 pemboleh ubah: V, x, t Kadar Perubahan (Petua Rantai)

$$\frac{dV}{dt} = -9.72$$

Suatu ais dalam bentuk kiub dengan sisi $x \text{ cm}$, mencair pada kadar $9.72 \text{ cm}^3 \text{ per minutes}$.

-ve

V

Cari kadar perubahan panjang sisi, dalam cm s^{-1} , pada ketika $x = 12 \text{ cm}$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = ?$$

$$-9.72 = 432 \times \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-9.72}{432} = -0.0225$$

$$V = x^3$$

$$\frac{dV}{dx} = 3x^2$$

$$= 3(12)^2$$

$$= 432$$

4 pemboleh ubah: V, A, x, t Kadar Perubahan (Petua Rantai)

$$\frac{dV}{dt} = -9.72$$

A block of ice in the form of a **cube** with **sides x cm**, **melts** at a **rate** of **9.72 cm^3 per minutes**.

-ve

V

Find the **rate of change of area**, in **$\text{cm}^2 \text{ s}^{-1}$** , at the instant when **$x = 12 \text{ cm}$** .

$$\begin{aligned} A &= 6x^2 \\ \frac{dA}{dx} &= 12x \\ &= 12(12) \\ &= 144 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= x^3 \\ \frac{dV}{dx} &= 3x^2 \\ &= 3(12)^2 \\ &= 432 \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \times \frac{dx}{dA} \times \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$-9.72 = 432 \times \frac{1}{144} \times \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{-9.72 \times 144}{432} = -3.24$$

Perubahan Kecil dan Penghampiran

$$\left(\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\delta y = \dots p$$

Diberi $y = 3x^2 + x - 4$, ungkapkan **perubahan kecil dalam y** , **dalam sebutan p** , pada ketika **x bertukar** dari **1** kepada **$1 + p$** , dengan keadaan p ialah suatu nilai kecil.

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\delta x = (1 + p) - 1 = p$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 6x + 1 \\ \frac{dy}{dx} &= 6(1) + 1 = 7 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\delta y}{p} = 7$$

$$\delta y = 7p$$

CONTOH

1. Cari had:

$$\begin{aligned} (a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(x+1)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \\ &= 0+1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \\ &= 1+1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+3x}{x} \right) &= \frac{\text{Undefined}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{x} + 3 \right) \\ &= \frac{4}{\infty} + 3 = 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+3x}{5-x} \right) &= \frac{\text{Undefined}}{\infty} = \frac{\infty}{-\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{4}{x} + 3}{\frac{5}{x} - 1} \right) \\ &= \frac{\frac{4}{\infty} + 3}{\frac{5}{\infty} - 1} \\ &= \frac{0+3}{0-1} = -3 \end{aligned}$$

2. SPM 2018 Kertas 1 Soalan 5:

Find the value of

Cari nilai bagi

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (7 - x^2),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (7 - x^2).$$

$$(b) \quad f''(2) \text{ if } f'(x) = 2x^3 - 4x + 3.$$

$$f''(2) \text{ jika } f'(x) = 2x^3 - 4x + 3.$$

[3 marks]

[3 markah]

$$\begin{aligned} (a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (7 - x^2) &= 7 - (1)^2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad f''(x) &= 6x - 4 \\ f''(2) &= 6 - 4 = 8 \end{aligned}$$

3. SPM 2017 Kertas 1 Soalan 1:

Diagram 1 shows a cubic graph $y = f(x)$ and a linear graph $y = g(x)$.

Rajah 1 menunjukkan graf kubik $y = f(x)$ dan graf linear $y = g(x)$.

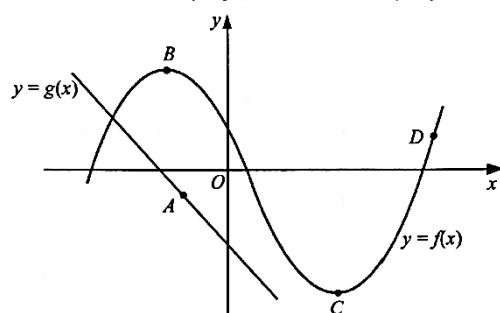


Diagram 1
Rajah 1

Point A lies on the straight line. Points B, C and D lie on the curve. The tangents to the curve at points B and C are parallel to the x-axis.

State which point(s) that satisfies the following condition:

Titik A terletak pada garis lurus. Titik-titik B, C dan D terletak pada lengkung. Tangen kepada lengkung itu pada titik B dan titik C adalah selari dengan paksi-x.

Nyatakan titik/titik-titik manakah yang memenuhi syarat berikut:

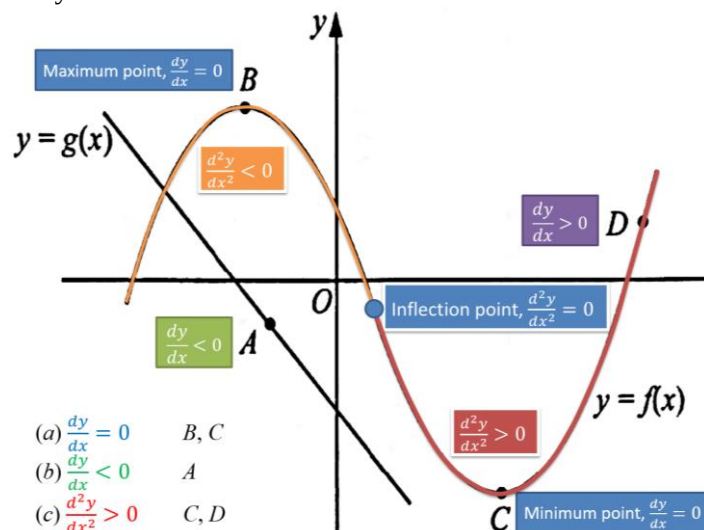
$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} < 0.$$

$$(c) \quad \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

[2 marks]
[2 markah]

Penyelesaian:



$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad B, C$$

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} < 0 \quad A$$

$$(c) \quad \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \quad C, D$$

4. Diberi lengkung $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 11$.

(a) Cari fungsi kecerunan lengkung tersebut.

(b) Cari kecerunan tangen kepada lengkung tersebut pada titik $(-2, 9)$.

(c) Cari persamaan garis normal kepada lengkung tersebut pada titik $(-2, 9)$.

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6$$

$$(b) \quad m_T = 3(-2)^2 - 3(-2) - 6 = 12$$

$$(c) \quad m_N = -\frac{1}{12}$$

$$9 = -\frac{1}{12}(-2) + c \rightarrow c = \frac{53}{6}$$

$$y = -\frac{1}{12}x + \frac{53}{6}$$

5. SPM 2013 Kertas 1 Soalan 19:

The point $P(1, -5)$ lies on the curve $y = 3x^2 - 8x$.

Titik $P(1, -5)$ terletak pada lengkung $y = 3x^2 - 8x$.

Find

Cari

(a) the gradient of the tangent to the curve at point P ,
kecerunan tangen kepada lengkung itu di titik P ,

(b) the equation of the normal to the curve at point P .
persamaan normal kepada lengkung itu di titik P .

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = 6x - 8 \quad (b) \quad m_N = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} [4 \text{ marks}] \\ [4 \text{ markah}] \end{array}$$

$$m_T = 6(1) - 8 \\ = -2$$

$$y = \frac{1}{2}x + c \\ -5 = \frac{1}{2}(1) + c \\ c = -\frac{11}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$$

6. Diberi lengkung $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 11$, mempunyai satu titik pusingan (2, 1).

(a) Tentukan sama ada titik (2, 1) ialah satu titik maksimum atau titik minimum.

(b) koordinat untuk titik pusingan yang lain bagi lengkung tersebut.

$$(a) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6 \quad (b) \text{ Pada titik pusingan, } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 3$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2, \quad x = -1$$

$$y = 1, \quad y = 14.5$$

Pada titik (2, 1), 

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(2) - 3 = 9 > 0$$

(2,1) ialah titik minimum

Titik pusingan lain ialah
(-1, 14.5)

7. SPM 2019 Kertas 1 Soalan 17:

The curve $y = px^4 + 2x$ has turning point at $(-1, q)$.

Find the value of p and of q .

[4 marks]

Lengkung $y = px^4 + 2x$ mempunyai titik pusingan pada $(-1, q)$.

Cari nilai p dan nilai q .

[4 markah]

$$\frac{dy}{dx} = 4px^3 + 2x$$

At turning point $(-1, q)$, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$4p(-1)^3 + 2(-1) = 0$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

$$q = p(-1)^4 + 2(-1)$$

$$q = \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^4 + 2(-1) = -\frac{5}{2}$$

8. SPM 2018 Kertas 2 Soalan 6:

Diagram 4 shows the front view of a part of a roller coaster track in a miniature park.

Rajah 4 menunjukkan pandangan hadapan sebahagian daripada laluan 'roller coaster' di sebuah taman replika.

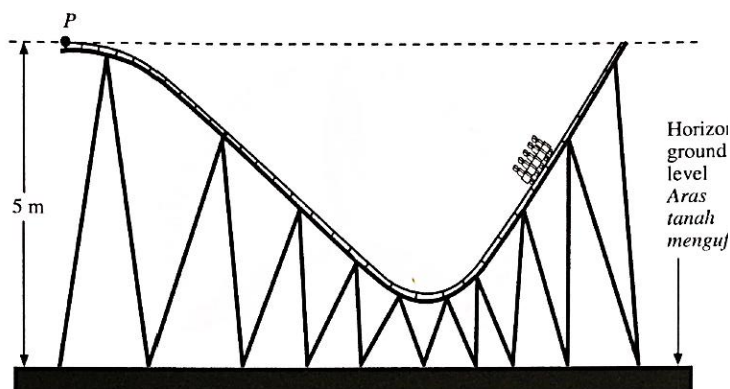


Diagram 4
Rajah 4

The curve part of the track of the roller coaster is represented by an equation

$$y = \frac{1}{64}x^3 - \frac{3}{16}x^2, \text{ with point } P \text{ as the origin.}$$

Find the shortest vertical distance, in m, from the track to ground level.

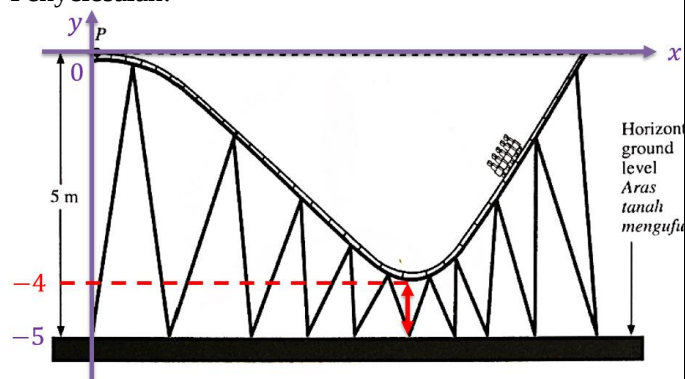
Bahagian lengkung laluan 'roller coaster' itu diwakili oleh persamaan

$$y = \frac{1}{64}x^3 - \frac{3}{16}x^2, \text{ dengan titik } P \text{ sebagai asalan.}$$

Cari jarak tegak terpendek, dalam m, dari laluan itu ke aras tanah.

[6 marks]
[6 markah]

Penyelesaian:



$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{3}{64}x^2 - \frac{3}{8}x \\ \frac{3}{64}x^2 - \frac{3}{8}x &= 0 \\ x\left(\frac{3}{64}x - \frac{3}{8}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0(\text{rejected}), x = 8$$

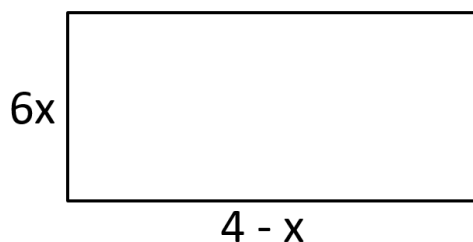
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{64}(8)^3 - \frac{3}{16}(8)^2 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Shortest vertical distance} &= 5 - 4 = 1 \text{ m} \end{aligned}$$

9. SPM 2014 Kertas 1 Soalan 17:

Due to the high living cost, Siva has planted several types of vegetables for his own consumption on a rectangular shape empty plot of land behind his house. He plans to fence the land which has a dimension of $6x$ m and $(4 - x)$ m.

Find the length, in m, the fence he has to buy when the area of the land is maximum. [4 marks]



$$\begin{aligned} \text{Area of the land, } A &= 6x(4 - x) \\ &= 24x - 6x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Perimeter} &= 6x + 6x + (4 - x) + (4 - x) \\ &= 10x + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{When area is maximum, } \frac{dA}{dx} &= 0 \\ 24 - 12x &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\frac{dA}{dx} = 24 - 12x$$

$$\begin{aligned} \text{Length of the fence} &= 10(2) + 8 \\ &= 28 \end{aligned}$$

10. SPM 2016 Kertas 2 Soalan 6:

6 Diagram 6 shows a front view of a window.

Rajah 6 menunjukkan pandangan hadapan sebuah tingkap.

$$(a) \quad 2x + 2y + \pi x = 4$$

$$y = \frac{4 - 2x - \pi x}{2}$$

$$A = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$A = 2x \left(\frac{4 - 2x - \pi x}{2} \right) + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$A = 4x - 2x^2 - \frac{1}{2}\pi x^2$$

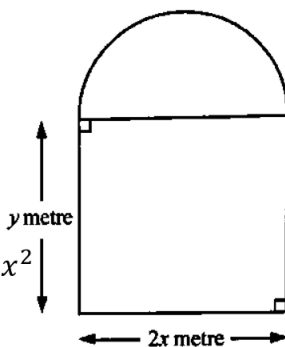


Diagram 6
Rajah 6

$$(b) \quad \frac{dA}{dx} = 4 - 4x - \pi x$$

When area is maximum, $\frac{dA}{dx} = 0$

$$4 - 4x - 3.142x = 0$$

$$x = 0.56$$

$$y = \frac{4 - 2(0.56) - \pi(0.56)}{2}$$

$$y = 0.56$$

$$\text{Width} = 2x = 1.12 \text{ m}$$

The arc of the window is a semicircle. The perimeter of the window is 4 metre.

Lengkuk bagi tingkap itu ialah suatu semi bulatan. Perimeter tingkap itu ialah 4 meter.

(a) Express the front surface area of the window in terms of x and π . [3 marks]

Ungkapkan luas permukaan hadapan tingkap itu dalam sebutan x dan π . [3 markah]

(b) By using $\pi = 3.142$, find the width, in metre, of the window when the front surface area is maximum. [3 marks]

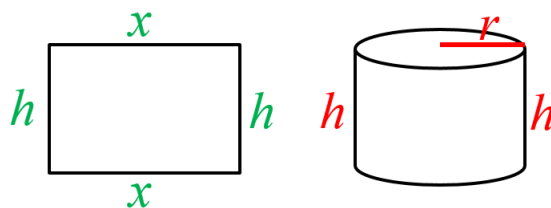
Dengan menggunakan $\pi = 3.142$, cari lebar, dalam meter, tingkap itu apabila luas permukaan hadapan adalah maksimum. [3 markah]

11. SPM 2015 Kertas 1 Soalan 23:

Zainal has a rectangular piece of zinc with a perimeter of 25 cm. He wants to use that piece of zinc to build an open cylinder at both ends.

Find the length and the width, in cm, of the piece of zinc that makes the volume of the cylinder is maximum. [4 marks]

$$\begin{aligned} \text{Perimeter} &= 25 \\ 2x + 2h &= 25 \\ h &= \frac{25 - 2x}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= 2\pi r \\ \frac{x}{2\pi} &= r \end{aligned}$$

Volume of cylinder, $V = \pi r^2 h$

$$V = \pi \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{25 - 2x}{2} \right)$$

$$V = \frac{1}{8\pi} (50x - 6x^2)$$

When the volume of cylinder is maximum, $\frac{dV}{dx} = 0$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{8\pi} (50 - 12x) = 0$$

$$x = \frac{25}{6}$$

$$h = \frac{25 - 2\left(\frac{25}{6}\right)}{2} = \frac{25}{3}$$

12. SPM 2015 Kertas 2 Soalan 2:

It is given the equation of the curve is $y = 2x(1-x)^4$ and the curve passes through $P(2, 4)$.

Diberi persamaan suatu lengkung ialah $y = 2x(1-x)^4$ dan lengkung itu melalui $P(2, 4)$.

Find

Cari

(a) the gradient of the curve at point P , [4 marks]

kecerunan lengkung pada titik P , [4 markah]

(b) the equation of the normal to the curve at point P . [3 marks]

persamaan garis normal kepada lengkung pada titik P . [3 markah]

$$\begin{aligned} (a) \quad u &= 2x, \quad v = (1-x)^4 \\ \frac{du}{dx} &= 2, \quad \frac{dv}{dx} = 4(1-x)^3(-1) \\ \frac{dy}{dx} &= 2(1-x)^4 + 2x[-4(1-x)^3] \\ m &= 2(1-2)^4 + 2(2)[-4(1-2)^3] \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad m_N &= -\frac{1}{18} \\ y &= -\frac{1}{18}x + c \\ 4 &= -\frac{1}{18}(2) + c \\ c &= \frac{37}{9} \\ y &= -\frac{1}{18}x + \frac{37}{9} \end{aligned}$$

13. SPM 2016 Kertas 1 Soalan 7:

Diagram 7 shows a part of curve $y = \frac{2x-6}{x+2}$ and a straight line.

Rajah 7 menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = \frac{2x-6}{x+2}$ dan satu garis lurus.

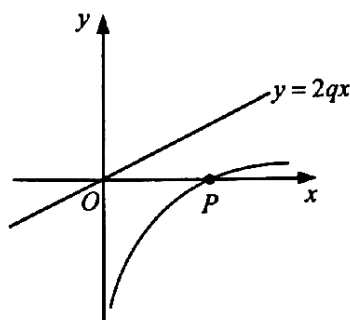


Diagram 7
Rajah 7

It is given that the straight line is parallel to the tangent of the curve at point P .

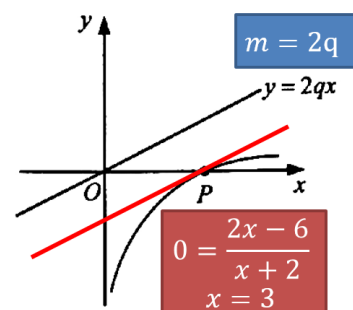
Find the value of q .

Diberi bahawa garis lurus itu selari dengan tangen kepada lengkung itu pada titik P .

Cari nilai q .

[4 marks]
[4 markah]

Penyelesaian:



$$\begin{aligned} u &= 2x - 6, \quad v = x + 2 \\ \frac{du}{dx} &= 2, \quad \frac{dv}{dx} = 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2(x+2) - (2x-6)}{(x+2)^2} \\ m_T &= \frac{2(3+2) - (2(3)-6)}{(3+2)^2} \\ m_T &= \frac{2}{5} \\ 2q &= \frac{2}{5} \\ q &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

14. SPM 2014 Kertas 1 Soalan 18:

Given $x = t^2 + 3$ and $\frac{dy}{dt} = 14t^3$, find

$$t^2 = x - 3$$

Diberi $x = t^2 + 3$ dan $\frac{dy}{dt} = 14t^3$, cari

(a) $\frac{dx}{dt}$,

$$(a) \frac{dx}{dt} = 2t$$

(b) $\frac{dy}{dx}$, in terms of x .

$\frac{dy}{dx}$, dalam sebutan x .

$$\begin{aligned} (b) \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ &= 14t^3 \times \frac{1}{2t} \\ &= 7t^2 \\ &= 7(x - 3) \end{aligned}$$

[4 marks]

[4 markah]

15. SPM 2016 Kertas 1 Soalan 6:

The surface area of a cube increases at a constant rate of $15 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

Find the rate of change of side length, in cm s^{-1} , when the volume of the cube is 125 cm^3 . [3 marks]

Luas permukaan bagi sebuah kiub bertambah pada kadar tetap $15 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

Cari kadar perubahan bagi panjang sisi, dalam cm s^{-1} , ketika isi padu kiub ialah 125 cm^3 . [3 markah]

$$\frac{dl}{dt} = ?$$

$$\frac{dA}{dt} = 15$$

$$\begin{aligned} V &= l^3 = 125 \\ l &= 5 \end{aligned}$$

$$A = 6l^2$$

$$\frac{dA}{dl} = 12l$$

$$\frac{dA}{dl} = 12(5) = 60$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dA} \times \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{60} \times 15 = \frac{1}{4} \text{ cm s}^{-1}$$

16. SPM 2018 Kertas 1 Soalan 6:

It is given that $L = 4t - t^2$ and $x = 3 + 6t$.

Diberi bahawa $L = 4t - t^2$ dan $x = 3 + 6t$.

$$\frac{dL}{dt} = 4 - 2t$$

(a) Express $\frac{dL}{dx}$ in terms of t .

$$\frac{dx}{dt} = 6$$

Ungkapkan $\frac{dL}{dx}$ dalam sebutan t .

(b) Find the small change in x , when L changes from 3 to 3.4 at the instant $t = 1$.

Cari perubahan kecil bagi x , apabila L berubah daripada 3 kepada 3.4 pada ketika $t = 1$.

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{dL}{dx} &= \frac{dL}{dt} \times \frac{dt}{dx} & (b) \quad \delta L &= 3.4 - 3 = 0.4 \quad [4 \text{ marks}] \\ & & & [4 \text{ markah}] \\ \frac{dL}{dx} &= (4 - 2t) \times \frac{1}{6} & \frac{\delta L}{\delta x} &\approx \frac{dL}{dx} \\ \frac{dL}{dx} &= \frac{1}{3}(2 - t) & \frac{0.4}{\delta x} &= \frac{1}{3}(2 - 1) \\ & & \delta x &= 1.2 \end{aligned}$$

17. SPM 2017 Kertas 2 Soalan 2:

It is given that the equation of a curve is $y = \frac{5}{x^2}$.

Diberi bahawa persamaan suatu lengkung ialah $y = \frac{5}{x^2}$.

(a) Find the value of $\frac{dy}{dx}$ when $x = 3$. (a) $y = 5x^{-2}$ [3 marks]

Cari nilai $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 3$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -10x^{-3} = -\frac{10}{x^3} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{10}{(3)^3} = -\frac{10}{27} \end{aligned} \quad [3 \text{ markah}]$$

(b) Hence, estimate the value of $\frac{5}{(2.98)^2}$. [4 marks]

Seterusnya, anggarkan nilai bagi $\frac{5}{(2.98)^2}$. [4 markah]

$$\begin{aligned} \text{Let } y &= \frac{5}{x^2}, \\ x_i &= 3, x_f = 2.98 \\ \delta x &= x_f - x_i \\ &= 2.98 - 3 \\ &= -0.02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \frac{\delta y}{\delta x} &\approx \frac{dy}{dx} & \delta y &= \frac{1}{135} \\ \frac{\delta y}{-0.02} &= -\frac{10}{27} & y_f &= y_i + \delta y \\ \delta y &= \frac{1}{135} & \frac{5}{(2.98)^2} &= \frac{5}{(3)^2} + \frac{1}{135} \\ & & &= 0.5630 \end{aligned}$$

18. SPM 2019 Kertas 2 Soalan 7:

A metal solid is formed by combining a cone and a cylinder with common radius, r cm. The total surface area of the solid, $A \text{ cm}^2$, is given by $A = 2\pi \left(\frac{18}{r} + \frac{r^2}{3} \right)$.

Sebuah pepejal logam dibentuk dengan menggabungkan sebuah kon dan sebuah silinder dengan jejari sepunya, r cm. Jumlah luas permukaan pepejal itu, $A \text{ cm}^2$, diberi oleh $A = 2\pi \left(\frac{18}{r} + \frac{r^2}{3} \right)$.

$$\frac{dA}{dt} = 1.4\pi$$

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{36\pi}{r^2} + \frac{4}{3}\pi r$$

(a) (i) The solid expands when heated. It is given that the surface area of the solid changes at the rate of $1.4\pi \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

Find the rate of change of its radius, in cm s^{-1} , when its radius is 6 cm.

Pepejal itu mengembang apabila dipanaskan. Diberi bahawa luas permukaan pepejal itu berubah dengan kadar $1.4\pi \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

Cari kadar perubahan jejari, dalam cm s^{-1} , pada ketika jejarinya ialah 6 cm.

(a)(i)

$$A = 36\pi r^{-1} + \frac{2}{3}\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = -36\pi r^{-2} + \frac{4}{3}\pi r$$

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{36\pi}{(6)^2} + \frac{4}{3}\pi(6) = 7\pi$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dA} \times \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{7\pi} \times 1.4\pi = 0.2 \text{ cm s}^{-1}$$

18. SPM 2019 Kertas 2 Soalan 7:

- (ii) Find the approximate change in the surface area of the solid, in terms of π , when its radius increases from 6 cm to 6.02 cm.

$\delta A = ?$

Cari perubahan hampir bagi luas permukaan pepejal itu, dalam sebutan π , apabila jejaringnya bertambah daripada 6 cm kepada 6.02 cm.

[6 marks]

[6 markah]

$$(a)(ii) \quad \delta r = 6.02 - 6 = 0.02$$

$$\frac{\delta A}{\delta r} = \frac{dA}{dr}$$

$$\frac{\delta A}{0.02} = -\frac{36\pi}{(6)^2} + \frac{4}{3}(6) = 7\pi$$

$$\delta A = 0.14\pi \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

- (b) If a solid of a same shape is to be formed in such that the total surface area is minimum, find the minimum total surface area of the solid, in terms of π .

[4 marks]

Jika sebuah pepejal yang sama bentuk akan dibentuk dengan keadaan jumlah luas permukaan ialah minimum, cari jumlah luas permukaan minimum bagi pepejal itu, dalam sebutan π .

[4 markah]

$$\frac{dA}{dr} = 0$$

(b)

$$-\frac{36\pi}{r^2} + \frac{4}{3}\pi r = 0$$

$$-36\pi + \frac{4}{3}\pi r^3 = 0$$

$$r = 3$$

$$A = 2\pi \left(\frac{18}{3} + \frac{(3)^2}{3} \right) = 18\pi$$

LATIHAN (KERTAS 1)

Klon SPM 2018

1 Cari nilai bagi

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+3x}{5-2x} \right),$

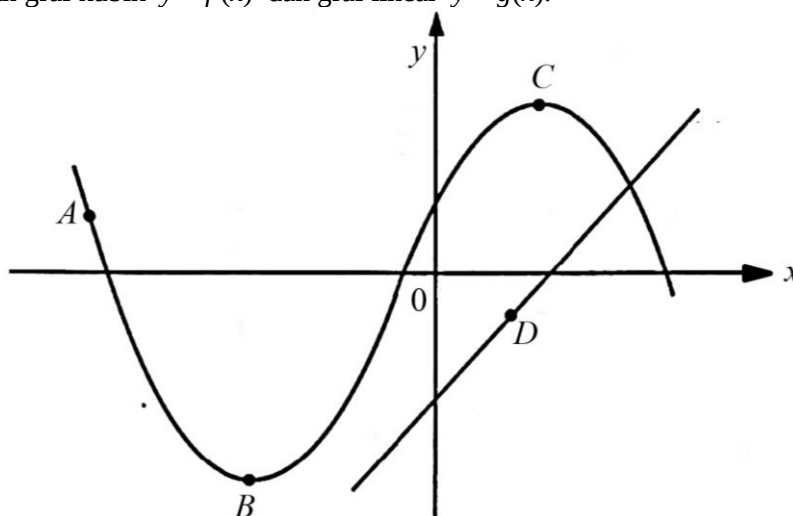
(b) $f''(2)$ jika $f'(x) = (2x^3 - 4x + 3)^2$

[4 markah]

[Jawapan: (a) -1.5; (b) 440]

Klon SPM 2017

2 Rajah menunjukkan graf kubik $y = f(x)$ dan graf linear $y = g(x)$.



Titik-titik A, B dan C terletak pada lengkung. Titik D terletak pada garis lurus.

Tangen kepada lengkung itu pada titik A dan B adalah selari dengan paksi-x.

Nyatakan titik/titik-titik manakah yang memenuhi syarat berikut:

(a) $\frac{dy}{dx} = 0.$

(b) $\frac{dy}{dx} > 0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

[2 markah]

[Jawapan: (a) B, C; (b) D; (c) C]

Klon SPM 2019

3 Lengkung $y = px - qx^4$ mempunyai titik pusingan pada $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$, dengan keadaan p dan q ialah pemalar.

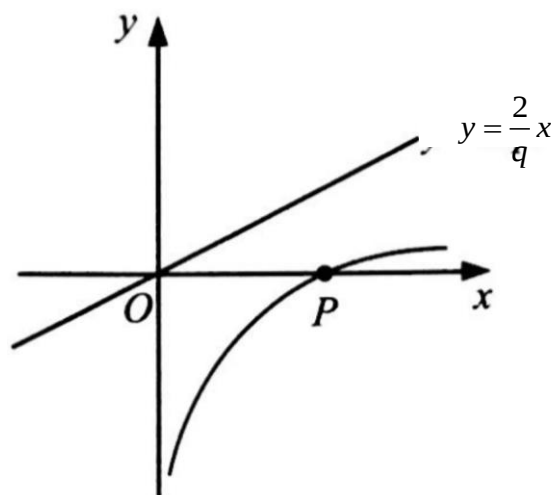
Cari nilai p dan nilai q .

[4 markah]

[Jawapan: $p = 2, q = -\frac{1}{2}$]

Klon SPM 2016

- 4 Rajah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = \frac{2x-6}{x+p}$ dan satu garis lurus.



Diberi bahawa garis lurus itu selari dengan tangen kepada lengkung itu pada titik P .

Ungkapkan p dalam sebutan q .

[4 markah]

[Jawapan: $p = q - 3$]

Klon SPM 2016

- 5 Luas permukaan bagi sebuah kiub bertambah pada kadar tetap $15 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

Cari kadar perubahan bagi panjang sisi, dalam $\text{cm}^3 \text{ s}^{-1}$, ketika isi padu kiub ialah 125 cm^3

[4 markah]

[Jawapan: $\frac{75}{4}$ or $18\frac{3}{4}$ or 18.75]

Klon SPM 2018

- 6 Diberi bahawa $L = 4t - t^2$ dan $t = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}x$.

(a) Ungkapkan $\frac{dL}{dx}$ dalam sebutan t .

(b) Cari perubahan kecil bagi x , apabila L berubah daripada 3 kepada 2.9 pada ketika $x = -3$.

[4 markah]

[Jawapan: (a) $\frac{dL}{dx} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t$; (b) $\delta x = 0.3$]

LATIHAN (KERTAS 2)

Klon SPM 2017

1 Diberi bahawa persamaan suatu lengkung ialah $y = \frac{5}{x^3}$.

(a) Cari nilai $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 3$.

[3 markah]

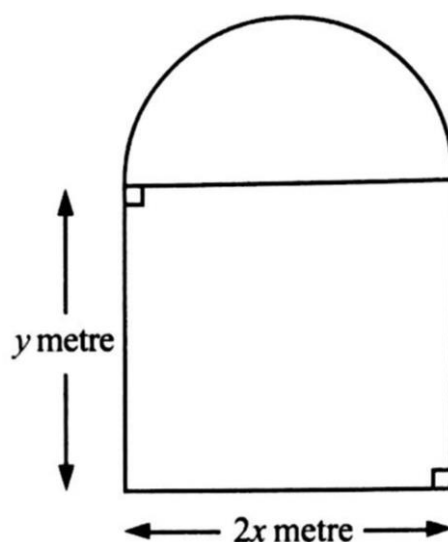
(b) Seterusnya, anggarkan nilai bagi $\frac{5}{(2.98)^3}$.

[4 markah]

[Jawapan: (a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{27}$; (b) $\frac{17}{90}$]

Klon SPM 2016

2 Rajah menunjukkan pandangan hadapan sebuah tingkap.



Lengkuk bagi tingkap itu ialah suatu semi bulatan. Perimeter tingkap itu ialah 5 metre.

(a) Ungkapkan luas permukaan hadapan tingkap itu dalam sebutan x dan π .

[3 markah]

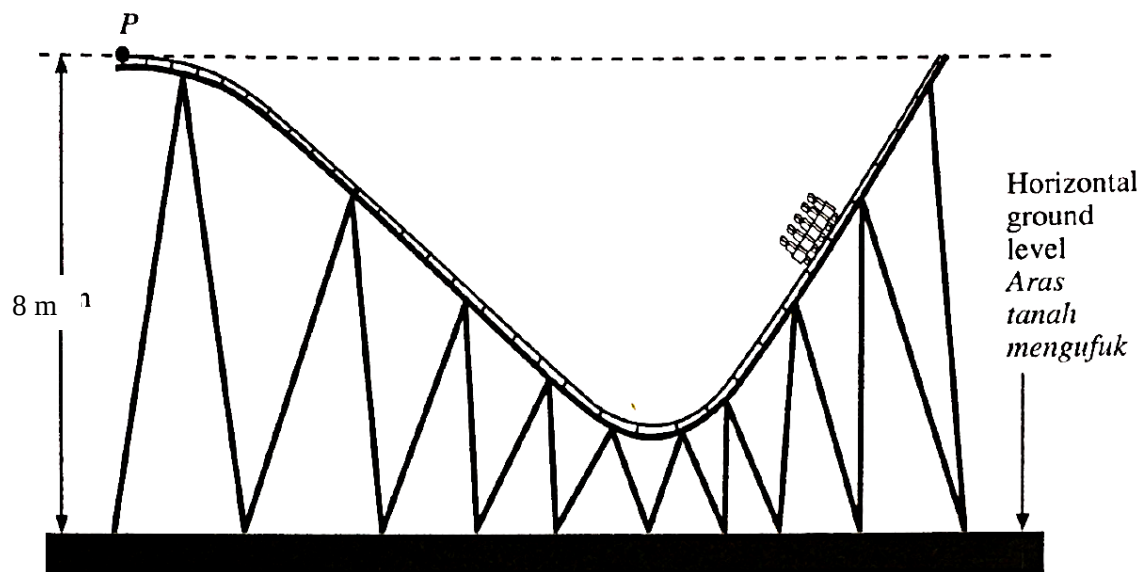
(b) Dengan menggunakan $\pi = 3.142$, cari lebar, dalam metre, tingkap itu apabila luas permukaan hadapan adalah maksimum.

[3 markah]

[Jawapan: (a) $A = 5x - 2x^2 - \frac{1}{2}\pi x^2$; (b) 1.4]

Klon SPM 2018

- 3 Rajah menunjukkan pandangan hadapan sebahagian daripada laluan 'roller coaster' di sebuah taman replika.



Bahagian lengkung laluan 'roller coaster' itu diwakili oleh persamaan $y = \frac{1}{64}x^3 - \frac{7}{32}x^2$, dengan titik P sebagai asalan.

Cari jarak tegak terpendek, dalam m, dari laluan itu ke aras tanah.

[6 markah]

[Jawapan: $1\frac{35}{54}$ m]

Klon SPM 2019

- 4 Sebuah pepejal logam dibentuk dengan menggabungkan sebuah kon dan sebuah silinder dengan jejari sepunya, r cm. Jumlah luas permukaan pepejal itu, A cm², diberi oleh $A = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{128}{r} + r^2\right)$.

- (a) (i) Pepejal itu mengembang apabila dipanaskan. Diberi bahawa luas permukaan pepejal itu berubah dengan kadar 1.4π cm² s⁻¹. Cari kadar perubahan jejari, dalam cm s⁻¹, pada ketika jejaringnya ialah 6 cm.
- (ii) Cari perubahan hamper bagi luas permukaan pepejal itu, dalam sebutan π , apabila jejaringnya bertambah daripada 6 cm to 6.02 cm.

[6 markah]

- (b) Jika sebuah pepejal yang sama bentuk akan dibentuk dengan keadaan jumlah luas permukaan ialah minimum, cari jumlah minimum bagi pepejal itu, dalam sebutan π .

[4 markah]

[Jawapan: (a) 0.2487 cm s⁻¹; (b) $\frac{76}{675}\pi$ cm² s⁻¹]



MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

8. JANJANG



NOTA

Janjang Aritmetik

(A) Ciri-ciri Janjang Aritmetik

1. **Jujukan** ialah suatu set nombor yang mengikut suatu pola tertentu.
Misalnya: 4, 7, 10, 13, ... ialah satu jujukan.
2. Setiap nombor dalam suatu jujukan dikenali sebagai **sebutan**.
3. Janjang aritmetik (J.A.) ialah satu jujukan nombor yang setiap sebutan (kecuali sebutan pertama) diperoleh dengan menambahkan satu pemalar kepada sebutan sebelumnya. Pemalar ini dikenal sebagai **beza sepunya, d** .

$$d = T_n - T_{n-1} \text{ atau } d = T_{n+1} - T_n$$

(B) Langkah-langkah untuk membuktikan sama ada jujukan nombor yang diberi ialah satu janjang aritmetik

Langkah 1: Senaraikan tiga sebutan yang berturutan. [Contoh: T_1, T_2, T_3 .]

Langkah 2: Hitung nilai bagi $T_3 - T_2$ dan $T_2 - T_1$.

Langkah 3: Jika $T_3 - T_2 = T_2 - T_1 = d$, maka jujukan nombor itu ialah satu janjang aritmetik.

Contoh:

Buktikan sama ada jujukan nombor yang berikut ialah satu janjang aritmetik (J.A.).

(a) 7, 10, 13, ...

(b) -20, -15, -9, ...

Penyelesaian:

(a)

7, 10, 13 $\leftarrow$ (Langkah 1: Senaraikan T_1, T_2, T_3)

$T_3 - T_2 = 13 - 10 = 3$ $\leftarrow$ (Langkah 2: Cari $T_3 - T_2$ dan $T_2 - T_1$)

$T_2 - T_1 = 10 - 7 = 3$ $\leftarrow$ (Langkah 2: Cari $T_3 - T_2$ dan $T_2 - T_1$)

$T_3 - T_2 = T_2 - T_1$

Maka, 7, 10, 13, ... ialah J.A.

(b)

-20, -15, -9

$T_3 - T_2 = -9 - (-15) = 6$

$T_2 - T_1 = -15 - (-20) = 5$

$T_3 - T_2 \neq T_2 - T_1$

Maka, -20, -15, -9, ... bukan satu J.A.

Menentukan Sebutan Tertentu dan Bilangan Sebutan dalam Suatu Janjang Aritmetik

(C) Menentukan Sebutan Tertentu dalam suatu Janjang Aritmetik (J.A.)

$$T_n = a + (n - 1) d$$

dengan keadaan

$$a = \text{sebutan pertama}$$
$$d = \text{beza sepunya}$$
$$n = \text{bilangan sebutan}$$
$$T_n = \text{sebutan ke } n$$

(D) Bilangan Sebutan dalam suatu Janjang Aritmetik (J.A.)

Tip pintar: Bilangan sebutan dalam suatu janjang aritmetik dapat dicari jika sebutan terakhir diketahui.

Contoh 1:

Cari bilangan sebutan bagi setiap janjang aritmetik yang berikut.

(a) 5, 9, 13, 17..., 121

(b) 1, 1.25, 1.5, 1.75, ..., 8

Penyelesaian:

(a) 5, 9, 13, 17..., 121

JA,

$$a = 5, d = 9 - 5 = 4$$

$$\text{Sebutan terakhir, } T_n = 121$$

$$a + (n - 1) d = 121$$

$$5 + (n - 1) (4) = 121$$

$$(n - 1) (4) = 116$$

$$(n - 1) = 116 \div 4 = 29$$

$$n = 30$$

(b) 1, 1.25, 1.5, 1.75, ..., 8

JA,

$$a = 1, d = 1.25 - 1 = 0.25$$

$$T_n = 8$$

$$a + (n - 1) d = 8$$

$$1 + (n - 1) (0.25) = 8$$

$$(n - 1) (0.25) = 7$$

$$(n - 1) = 28$$

$$n = 29$$

(E) Sebutan Berturutan dalam suatu Janjang Aritmetik (J.A.)

Jika a, b, c ialah tiga sebutan berturutan dalam suatu janjang aritmetik, maka

$$c - b = b - a$$

Contoh 2:

Jika $x + 1, 2x + 3$ dan 6 ialah tiga sebutan yang berturutan dalam suatu janjang aritmetik, cari nilai x dan beza sepunya.

Penyelesaian:

JA: $x + 1, 2x + 3, 6$

$$c - b = b - a$$

$$6 - (2x + 3) = (2x + 3) - (x + 1)$$

$$6 - 2x - 3 = 2x + 3 - x - 1$$

$$3 - 2x = x + 2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

JA: $(\frac{1}{3}) + 1, 2(\frac{1}{3}) + 3, 6$

$$\frac{4}{3}, \frac{11}{3}, 6$$

$$d = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

(F) Hasil Tambah n Sebutan Pertama suatu Janjang Aritmetik

Hasil Tambah n Sebutan Pertama suatu Janjang Aritmetik

Hasil tambah sebutan n pertama, S_n bagi AP ialah :

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

yang mana,
 a = sebutan pertama
 d = beza sepunya

$$S_n = \frac{n}{2} (a + l)$$

yang mana,
 a = sebutan pertama
 l = sebutan terakhir

Contoh:

Hitung hasil tambah bagi setiap janjang aritmetik yang berikut:

(a) $-11, -8, -5, \dots$ sehingga 15 sebutan pertama.

(b) $8, 10\frac{1}{2}, 13, \dots$ sehingga 15 sebutan pertama.

(c) $5, 7, 9, \dots, 75$

[Tip pintar: bilangan sebutan, n dalam suatu janjang aritmetik dapat dicari jika sebutan terakhir diketahui]

Penyelesaian:

(a) $a = -11$

$$d = -8 - (-11) = 3$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} [2a + 14d]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} [2(-11) + 14(3)]$$
$$= 15$$

(b) $a = 8$

$$d = 10\frac{1}{2} - 8 = \frac{5}{2}$$

$$S_{13} = \frac{13}{2} [2a + 12d]$$

$$S_{15} = \frac{13}{2} \left[2(8) + 14\left(\frac{5}{2}\right) \right]$$
$$= 299$$

(c) $a = 5$ dan $l = 75$

$$d = 7 - 5 = 2$$

$$T_n = 75$$

$$a + (n-1)d = 75$$

$$5 + (n-1)(2) = 75$$

$$(n-1)(2) = 70$$

$$n-1 = 35$$

$$n = 36$$

$$S_{36} = \frac{36}{2} [a + l]$$

$$S_{36} = \frac{36}{2} [5 + 75] = 1440$$

Janjang Geometri

(A) Ciri-ciri Janjang Geometri

Janjang Geometri (J.G.) ialah satu jujukan nombor yang setiap sebutan (kecuali sebutan pertama) diperoleh dengan mendarabkan satu pemalar kepada sebutan sebelumnya. Pemalar ini dikenal sebagai **nisbah sepunya, r** .

Contoh:

Tentukan sama ada jujukan nombor yang berikut ialah janjang geometri (J.G.) atau bukan janjang geometri.

(a) 1, 4, 16, 64,

(b) 10, -5, 2.5, -1.25,

(c) 2, 4, 12, 48,

[Tip pintar: Bagi suatu janjang geometri, sentiasa darab satu nombor tetap untuk mendapat nombor seterusnya]

Penyelesaian:

(a)

$$\begin{array}{ccccccc} & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 1, & 4, & 16, & 64, & \dots & & \end{array}$$

Nisbah

$$\text{sepunya, } r = \frac{T_n}{T_{n-1}}$$

Nisbah sepunya,

$$r = \frac{T_3}{T_2} = \frac{16}{4} = 4, \quad r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

1, 4, 16, 64, ialah **JG, $a = 1, r = 4$** .

(b)

$$\begin{array}{ccccccc} & \times -\frac{1}{2} & & \times -\frac{1}{2} & & \times -\frac{1}{2} & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 10, & -5, & 2.5, & -1.25, & \dots & & \end{array}$$

Nisbah sepunya,

$$r = \frac{T_3}{T_2} = \frac{2.5}{-5} = -\frac{1}{2}, \quad r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

10, -5, 2.5, -1.25, ... ialah **JG, $a = 10, r = -\frac{1}{2}$**

(c)

$$\begin{array}{ccccccc} & \times 2 & & \times 3 & & \times 4 & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 2, & 4, & 12, & 48, & \dots & & \end{array}$$

Nisbah sepunya,

$$r = \frac{T_3}{T_2} = \frac{12}{4} = 3, \quad r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{T_3}{T_2} \neq \frac{T_2}{T_1}$$

2, 4, 12, 48, ialah **Bukan JG**

Kerana nisbah antara nombor-nombor berurutan tidak sama.

(B) Langkah-langkah untuk membuktikan sama ada jujukan nombor yang diberi ialah satu jangjang geometri.

Langkah 1: Senaraikan tiga sebutan yang berturutan. [Contoh: T_1, T_2, T_3 .]

Langkah 2: Hitung nilai bagi $\frac{T_3}{T_2}$ dan $\frac{T_2}{T_1}$.

Langkah 3: Jika $\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_2}{T_1} = r$ maka jujukan nombor itu ialah satu jangjang geometri.

Langkah 4: Jika $\frac{T_3}{T_2} \neq \frac{T_2}{T_1}$, maka jujukan nombor itu **bukan** satu jangjang geometri.

Menentukan Sebutan Tertentu dan Bilangan Sebutan dalam Suatu Jangjang Geometri

(C) Sebutan Tertentu dalam Suatu Jangjang Geometri

$$T_n = ar^{n-1}$$

a = sebutan pertama
 r = nisbah sepunya
 n = bilangan sebutan
 T_n = sebutan ke- n

Contoh:

Cari sebutan yang diberi bagi setiap jangjang geometri yang berikut.

(a) $8, 4, 2, \dots, T_8$

(b) $\frac{16}{27}, \frac{8}{9}, \frac{4}{3}, \dots, T_6$

Penyelesaian:

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$T_1 = ar^{1-1} = ar^0 = a \quad \leftarrow \text{(sebutan pertama)}$$

$$T_2 = ar^{2-1} = ar^1 = ar \quad \leftarrow \text{(sebutan kedua)}$$

$$T_3 = ar^{3-1} = ar^2 \quad \leftarrow \text{(sebutan ketiga)}$$

$$T_4 = ar^{4-1} = ar^3 \quad \leftarrow \text{(sebutan keempat)}$$

(a) $8, 4, 2, \dots$

$$a = 8, \quad r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$T_8 = ar^7$$

$$T_8 = 8 \left(\frac{1}{2} \right)^7 = \frac{1}{16}$$

(b) $\frac{16}{27}, \frac{8}{9}, \frac{4}{3}, \dots$

$$a = \frac{16}{27}, \quad r = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{16}{27}} = \frac{2}{3}$$

$$T_6 = ar^5$$

$$T_8 = \frac{16}{27} \left(\frac{2}{3} \right)^5 = \frac{512}{6561}$$

(D) Bilangan Sebutan dalam Suatu Janjang Geometri

Tip pintar: Bilangan sebutan dalam suatu janjang geometri dapat dicari jika sebutan terakhir diketahui.

Contoh:

Cari bilangan sebutan bagi setiap janjang geometri yang berikut.

(a) 2, 4, 8, ..., 8192

(b) 14, 16, 19, ..., $\frac{16}{729}$

(c) $-\frac{1}{2}$, 1, -2, ..., 64

Penyelesaian:

(a) 2, 4, 8, ..., 8192 $\leftarrow$ (sebutan terakhir diberi)

$$a = 2$$

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$T_n = 8192$$

$$ar^{n-1} = 8192 \leftarrow T_n = ar^{n-1}$$

$$(2)(2)^{n-1} = 8192$$

$$(2)^{n-1} = 8192$$

$$(2)^{n-1} = 2^{12}$$

$$\text{maka, } n - 1 = 12$$

$$n = 13$$

(b) 14, 16, 19, ..., $\frac{16}{729}$

$$a = \frac{1}{4}, r = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$T_n = \frac{16}{729}$$

$$ar^{n-1} = \frac{16}{729}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{16}{729}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{16}{729} \times 4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{64}{729}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

(c) $-\frac{1}{2}$, 1, -2, ..., 64

$$a = -\frac{1}{2}, r = \frac{-2}{1} = -2$$

$$T_n = 64$$

$$ar^{n-1} = 64$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) (-2)^{n-1} = 64$$

$$T_n = 64$$

$$ar^{n-1} = 64$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) (-2)^{n-1} = 64$$

$$(-2)^{n-1} = 64 \times -2$$

$$(-2)^{n-1} = -128$$

$$(-2)^{n-1} = (-2)^7$$

$$n - 1 = 7$$

$$n = 8$$

(E) Tiga sebutan Berturutan dalam suatu jangjang geometri (J.G.)

Jika e, f dan g adalah 3 sebutan berturutan dalam suatu jangjang geometri (JG), maka

$$\frac{g}{f} = \frac{f}{e}$$

Contoh:

Jika $p + 20, p - 4, p - 20$ adalah 3 sebutan berturutan dalam suatu jangjang geometri, cari nilai p .

Penyelesaian:

$$\frac{p-20}{p-4} = \frac{p-4}{p+20}$$

$$(p + 20)(p - 20) = (p - 4)(p - 4)$$

$$p^2 - 400 = p^2 - 8p + 16$$

$$8p = 416$$

$$p = 52$$

Hasil Tambah Suatu Jangjang Geometri

(F) Hasil Tambah n sebutan pertama suatu Jangjang Geometri

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$$
$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r < 1$$

a = sebutan pertama

r = nisbah sepunya

n = bilangan sebutan

S_n = hasil tambah n sebutan pertama

Contoh 1:

Cari hasil tambah bagi setiap jangjang geometri yang berikut.

(a) 1, 2, 4, ... sehingga 7 sebutan pertama

(b) 12, 3, ..., $\frac{3}{64}$

[Tip pintar: bilangan sebutan, n dalam suatu jangjang aritmetik dapat dicari jika sebutan terakhir diketahui]

Penyelesaian:

(a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

$$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, \dots JG : a = 1, \quad r = \frac{2}{1} = 2$$

$$S_7 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$$

Atau guna rumus

$$JG : a = 1, r = \frac{2}{1} = 2 (r > 1)$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$
$$= \frac{1(2^7 - 1)}{2 - 1} = \frac{128 - 1}{1} = 127$$

Penyelesaian:

(b) $12, 3, \dots, \frac{3}{64}$

JG : $a = 12, r = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} (r < 1)$

$$T_n = \frac{3}{64}$$

$$ar^{n-1} = \frac{3}{64}$$

$$(12) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{64}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{256}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$\therefore n - 1 = 4$$

$$n = 5$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \\ &= \frac{1(1 - (\frac{1}{4})^5)}{1 - (\frac{1}{4})} \\ &= \frac{12(\frac{1023}{1024})}{\frac{3}{4}} \\ &= 15 \frac{63}{64} \end{aligned}$$

Hasil Tambah Janjang Geometri Sehingga Ketakterhinggaan

(G) Mencari Hasil Tambah Janjang Geometri Sehingga Ketakterhinggaan

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}, \quad -1 < r < 1$$

a = sebutan pertama

r = nisbah sepunya

S_{∞} = hasil tambah sehingga ketakterhinggaan

Contoh:

Cari hasil tambah setiap siri yang berikut sehingga ketakterhinggaan.

(a) $8, 4, 2, \dots$

(b) $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$

(c) $3, 1, \frac{1}{3}, \dots$

Penyelesaian:

(a) $8, 4, 2, \dots$

$$a = 8, r = 4/8 = \frac{1}{2}$$

$$S_{\infty} = 8 + 4 + 2 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + 0.0625 + 0.03125 + \dots$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots \\
 & a = \frac{2}{3}, r = \frac{2/9}{2/3} = \frac{1}{3} \\
 & S_{\infty} = \frac{a}{1-r} \\
 & S_{\infty} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & 3, 1, \frac{1}{3}, \dots \\
 & a = 3, r = \frac{1}{3} \\
 & S_{\infty} = \frac{a}{1-r} \\
 & S_{\infty} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2/3} = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

(H) Perpuluhan Jadi Semula

Contoh bagi perpuluhan jadi semula:

$$\frac{2}{9} = 0.222222222222 \dots$$

$$\frac{8}{33} = 0.242424242424 \dots$$

$$\frac{41}{333} = 0.123123123123 \dots$$

Perpuluhan jadi semula boleh ditukar kepada pecahan dengan menggunakan rumus hasil tambah sehingga ketakterhinggaan

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}, \quad -1 < r < 1$$

Contoh (Tukar perpuluhan jadi semula kepada pecahan)

Ungkapkan setiap perpuluhan jadi semula yang berikut sebagai suatu pecahan dalam bentuk yang paling ringkas.

(a) 0.8888 ...

(b) 0.171717...

(c) 0.513513513

Penyelesaian:

(a) $0.8888 = 0.8 + 0.08 + 0.008 + 0.0008 + \dots$ (perpuluhan jadi semula)

$$JG, a = 0.8, r = \frac{0.08}{0.8} = 0.1$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$S_{\infty} = \frac{0.8}{1-0.1}$$

$$S_{\infty} = \frac{0.8}{0.9}$$

$$S_{\infty} = \frac{8}{9} \rightarrow \boxed{\text{Semakan kalkulator} \quad \frac{8}{9} = 0.888888 \dots}$$

(b) $0.17171717 \dots$
 $= 0.17 + 0.0017 + 0.000017 + 0.00000017 + \dots$
 $JG, a = 0.17, r = \frac{0.0017}{0.17} = 0.01$
 $S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$

$$S_{\infty} = \frac{0.17}{1-0.01} = \frac{0.17}{0.99} = \frac{17}{99} \rightarrow$$

Peringatan:
semak jawapan
dengan kalkulator

(c) $0.513513513 \dots$
 $= 0.513 + 0.000513 + 0.000000513 + \dots$
 $JG, a = 0.513, r = \frac{0.000513}{0.513} = 0.001$
 $S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$
 $S_{\infty} = \frac{0.513}{1-0.001} = \frac{0.513}{0.999} = \frac{513}{999} = \frac{19}{37}$

JANJANG

JANJANG ARITMETIK (JA)

Suatu jujukan nombor dengan setiap sebutan diperoleh dengan menambahkan satu pemalar kepada sebutan sebelumnya

- n sebutan pertama:
 $a, a + d, a + 2d, \dots, T_n$
- Beza sepunya:
 $d = T_2 - T_1$
 $= T_3 - T_2$
 $\vdots$
 $= T_n - T_{n-1}$
- Sebutan ke- n :
 $T_n = a + (n - 1)d$
- Hasil tambah n sebutan pertama:
 (a) $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$
 (b) $S_n = \frac{n}{2} [a + T_n]$ atau $S_n = \frac{n}{2} [a + l]$
- $T_n = S_n - S_{n-1}$

JANJANG GEOMETRI (JG)

Suatu jujukan nombor dengan setiap sebutan diperoleh dengan mendarabkan satu pemalar kepada sebutan sebelumnya.

- n sebutan pertama:
 $a, ar, ar^2, \dots, T_n$
- Nisbah sepunya:
 $r = \frac{T_2}{T_1}$
 $= \frac{T_3}{T_2}$
 $\vdots$
 $= \frac{T_n}{T_{n-1}}$
- Sebutan ke- n :
 $T_n = ar^{n-1}$
- Hasil tambah n sebutan pertama:
 (a) $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, |r| < 1$
 (b) $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, |r| > 1$
- Hasil tambah hingga ketakterhinggaan
 $S_{\infty} = \frac{a}{1-r}, -1 < r < 1$
- $T_n = S_n - S_{n-1}$

NOTA TAMBAHAN

JANJANG ARITMETIK



PART 1

<https://www.youtube.com/watch?v=YpE7dOXgzm8>



PART 2

<https://www.youtube.com/watch?v=wZPWgASaZtY>

JANJANG GEOMETRI



<https://www.youtube.com/watch?v=HhLOFJgYhAo>

JANJANG (Penyelesaian Masalah)



<https://www.youtube.com/watch?v=LrNu1qbBjpo>



https://www.youtube.com/watch?v=ulueuJ_i9CE

1. Perbincangan Soalan SPM (Kertas 1) :

MT T4 5.1 Janjang Aritmetik [KSSM]



<https://www.youtube.com/watch?v=3LHCjDIGszI&t=390s>

MT T4 5.2 Janjang Geometri [KSSM]



<https://www.youtube.com/watch?v=3jNAejWApCw>

Perbincangan Soalan SPM (Kertas 2) :

MT T4 JANJANG [KSSM]



CONTOH

Janjang

KERTAS 1(SOALAN PENDEK)

JANJANG ARITMETIK & JANJANG GEOMETRI

Soalan 1

Diberi 11, $p + 1$, 19 ialah tiga sebutan berturutan dalam satu janjang aritmetik dan $(p+1)$ ialah sebutan ketiga, cari nilai

- (a) p
- (b) sebutan pertama.

Jawapan 1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad d &= T_3 - T_2 = T_4 - T_3 \\ p+1-11 &= 19-(p+1) \\ p-10 &= 19-p-1 \\ p-10 &= 18-p \\ p+p &= 18+10 \\ 2p &= 28 \\ p &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad T_3 &= p+1 = 14+1 = 15 \\ T_2 &= 11 \\ d &= T_3 - T_2 = 15-11 = 4 \\ a &= 11-4 = 7 \end{aligned}$$

Soalan 2

Diberi 13, $m + 6$ dan $3m - n$ ialah tiga sebutan berturutan dalam satu janjang aritmetik.

- (a) Ungkapkan m dalam sebutan n .
- (b) Cari beza sepunya jika $n = 6$.

Jawapan 1

$$\text{(a)} \quad 13, m+6, 3m-n$$

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 = T_3 - T_2 \\ (m+6)-13 &= (3m-n)-(m+6) \\ m+6-13 &= 3m-n-m-6 \\ m-7 &= 2m-n-6 \\ n-7+6 &= 2m-m \\ n-1 &= m \\ \therefore m &= n-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad n &= 6, \\ m &= 6-1 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &13, 5+6, 3(5)-6 \\ &13, 11, 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= 11-13 \\ d &= -2 \end{aligned}$$

Soalan 3

Sebutan ke- n bagi suatu jangjang aritmetik diberi oleh $T_n = \frac{3}{2}(n^2 - 5n)$. Cari hasil tambah 13 sebutan yang pertama bagi jangjang itu.

Jawapan 3

$$T_n = \frac{3}{2}(n^2 - 5n)$$

$$T_1 = \frac{3}{2}(1^2 - 5(1)) = -6$$

$$T_2 = \frac{3}{2}(2^2 - 5(2)) = -9$$

$$d = T_2 - T_1$$

$$d = -9 - (-6) = -3$$

$$a = T_1 = -6$$

$$d = -3$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}(2(-6) + (13-1)(-3))$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}(-12 + (12)(-3))$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}(-12 - 36)$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}(-48)$$

$$S_{13} = 13(-24) = -312$$

Soalan 5

Tiga sebutan pertama suatu jangjang geometri ialah h , 11, k . Cari nilai h dan k .

Jawapan 5

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

$$\frac{11}{h} = \frac{k}{11}$$

$$11(11) = hk$$

$$121 = hk$$

Soalan 4

Diberi sebutan kedua suatu jangjang geometri ialah 5 dan sebutan kelima ialah $\frac{5}{8}$.

Cari : (a) Nisbah sepunya

(b) Jumlah empat sebutan pertama

Jawapan 4

$$(a) T_2 = 5 \Rightarrow ar = 5$$

$$T_5 = \frac{5}{8} \Rightarrow ar^4 = \frac{5}{8}$$

$$\frac{T_5}{T_2} = \frac{ar^4}{ar} = \frac{5}{5}$$

$$r^3 = \frac{1}{8}$$

$$r^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$(b) T_2 = ar = 5$$

$$a\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \Rightarrow a = 10$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_4 = \frac{10\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{75}{4}$$

Soalan 6

Diberi y , $2\frac{4}{y}$, p , ... ialah suatu jangjang geometri.

Ungkapkan p dalam sebutan y .

Jawapan 6

$$r = \frac{2}{y} = \frac{p}{\frac{4}{y}}$$

$$\frac{2}{y} = p\left(\frac{y}{4}\right)$$

$$\frac{2}{y} = \frac{py}{4}$$

$$2(4) = (py)(y)$$

$$8 = py^2$$

$$\frac{8}{y^2} = p$$

$$p = \frac{8}{y^2}$$

Soalan 7

Diberi sebutan ketiga suatu jangjang geometri ialah 16. Hasil tambah sebutan ketiga dan sebutan keempat ialah 8. Cari

- (a) Sebutan pertama dan nisbah sepunya
- (b) Hasil tambah Ketakterhinggaan jangjang geometri ini.

Jawapan 7

(a)

$$T_3 = 16$$

$$ar^2 = 16$$

$$T_3 + T_4 = 8$$

$$ar^2 + ar^3 = 8$$

$$ar^2(1+r) = 8$$

$$\frac{ar^2(1+r)}{ar^2} = \frac{8}{16}$$

$$1+r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$ar^2 = 16$$

$$a = \frac{16}{r^2} = \frac{16}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$a = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 16\left(\frac{4}{1}\right) = 64$$

(b)

$$a = 64$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$S_{\infty} = \frac{64}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$S_{\infty} = \frac{64}{\frac{3}{2}}$$

$$S_{\infty} = 64\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$S_{\infty} = \frac{128}{3}$$

Soalan 8

Diberi sebutan pertama dan sebutan kelapan suatu Jangjang arimetik masing-masing ialah -3 dan 25.

Cari

- (a) Beza sepunya
- (b) Hasil tambah 10 sebutan pertama.

Jawapan 8

(a)

$$a = -3, T_8 = 25$$

$$T_8 = a + 7d = 25$$

$$-3 + 7d = 25$$

$$7d = 25 + 3$$

$$7d = 28$$

$$d = 4$$

(b)

$$a = -3, d = 4$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2a + (10-1)d]$$

$$S_{10} = 5[2(-3) + 9(4)]$$

$$S_{10} = 5(-6 + 36)$$

$$S_{10} = 5(30)$$

$$\therefore S_{10} = 150$$

Soalan 9

Hasil tambah sehingga ketakterhinggaan bagi suatu jangjang geometri ialah 8. Diberi sebutan pertama ialah 2. Cari

- (a) Nisbah sepunya
- (b) Sebutan ke-2.

Jawapan 9

(a) $a = 2$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = 8$$

$$\frac{2}{1-r} = 8$$

$$r = \frac{3}{4}$$

(b) $T_2 = ar^{2-1}$

$$= (2) \left(\frac{3}{4}\right)^1$$

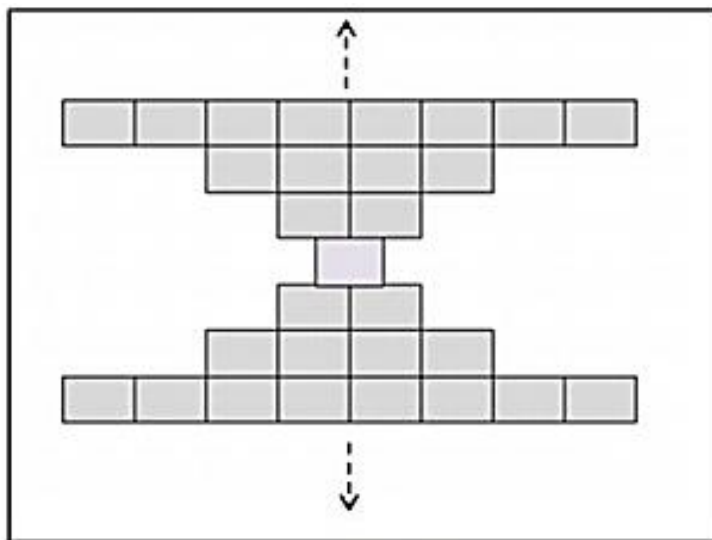
$$= \left(\frac{3}{2}\right)$$

Janjang
KERTAS 2 (SOALAN PANJANG)

JANJANG ARITMETIK & JANJANG GEOMETRI

Soalan 1

Rajah 1 menunjukkan sebahagian daripada susunan 509 jubin pada dinding sebuah bilik.



Rajah 1

Cari

- (a) bilangan baris jubin yang boleh disusun.
 (b) Bilangan jubin pada baris yang paling bawah.

Jawapan 1

(a) 1, 2, 4, 8, ...

$a = 1$

$r = 2$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$255 = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$2^n - 1 = 255$$

$$2^n = 256$$

$$n = 8$$

$a = 2$

$r = 2$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$254 = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$2^n - 1 = 127$$

$$2^n = 128$$

$$n = 7$$

$$\text{Bilangan baris} = 8 + 7 = 15$$

(b) $a = 2$

$r = 2$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$T_7 = (2)(2^6) = 128$$

Soalan 2

Rajah 2 di bawah menunjukkan sebahagian daripada susunan batu-bata yang sama saiz dalam suatu tapak pembinaan.



Rajah 2

Bilangan bata pada garis yang paling bawah ialah 100 ketul. Bagi baris-baris yang berikutnya, bilangan bata adalah 2 ketul kurang daripada baris yang di bawahnya. Tinggi setiap ketul bata itu ialah 7 cm. Rahman membina sebuah tembok dengan mneyusun bata mengikut susunan itu. Bilangan bata pada garis yang paling atas ialah 4 ketul.

Hitungkan

- (a) tinggi, dalam cm, tembok itu.
- (b) jumlah harga bata yang digunakan jika harga seketul bata ialah 50 sen.

Jawapan 2

100, 98, 96, ..., 4 adalah satu jangjang aritmetik

$a = 100$ dan $d = -2$

(a)

$$T_n = 4$$

$$a + (n - 1)d = 4$$

$$100 + (n - 1)(-2) = 4$$

$$100 - 2n + 2 = 4$$

$$2n = 98$$

$$n = 49$$

$$\text{Maka, tinggi tembok} = 49 \times 7 = 343 \text{ cm}$$

(b)

Jumlah bata yang digunakan,

$$S_{49} = \frac{49}{2}(100 + 4)$$
$$= 2548$$

$$\text{Maka, jumlah harga} = 2548 \times \text{RM}0.50$$
$$= \text{RM}1,274$$

Soalan 3

Satu bulatan, jejari 10cm dibahagikan kepada 4 sektor dengan keadaan luas sektor-sektor itu adalah dalam
 jangjang geometri. Diberi bahawa luas sector yang paling besar ialah 8 kali luas sektor yang paling kecil. Cari
 luas sektor yang paling besar itu.

Jawapan 3

Katakan luas yang terkecil

$$= \frac{1}{2} (10)^2 \theta \leftarrow (\text{luas sektor} = \frac{1}{2} j^2 \theta)$$

$$= 50 \theta$$

nisbah sepunya = r

jangjang geometri ialah $50 \theta, 50 \theta r, 50 \theta r^2, 50 \theta r^3$.

Diberi bahawa luas sektor yang paling besar ialah 8 kali luas sektor yang paling kecil,

$$50 \theta r^3 = 8 (50 \theta)$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

Jumlah luas semua sektor

= luas bulatan

$$= \pi j^2$$

$$= \pi (10)^2$$

$$= 100\pi$$

$$S_4 = 100\pi$$

$$\frac{50\theta(r^4 - 1)}{r - 1} = 100\pi$$

$$\frac{50\theta(2^4 - 1)}{2 - 1} = 100\pi$$

$$50\theta(15) = 100\pi$$

$$\theta = \frac{2\pi}{15}$$

$$T_4 = 50\theta r^3$$

$$T_4 = 50 \left(\frac{2\pi}{15} \right) (2)^3$$

$$T_4 = 167.6 \quad (\pi = 3.142)$$

$$\text{Luas sektor terbesar} = 167.6 \text{ cm}^2$$

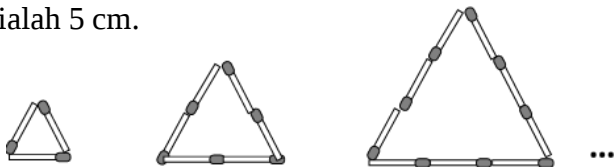
LATIHAN

JANJANG ARITMETIK

1. Satu tumbuhan bertambah tinggi dengan 0.5 cm setiap hari. Jika tinggi asalnya ialah 4cm, berapa hari lagi ketinggiannya akan menjadi 175cm?

Jwp: 342

2. Rajah menunjukkan tiga segitiga yang dibentukkan oleh mancis. Panjang setiap mancis ialah 5 cm.



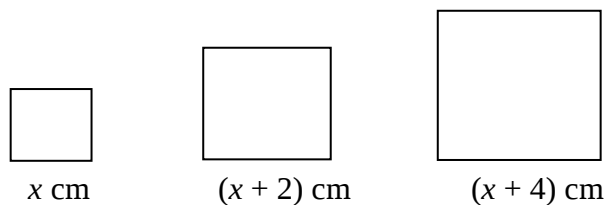
- (a) Tulis tiga sebutan pertama dalam jangjang ini
(b) Cari beza sepunya jangjang itu

**Jwp: (a) 15, 30, 45
(b) $d = 15$**

3. Pada hari pertama, isipadu air dalam sebuah tangki ialah 600 liter. Setiap hari berikutnya, air dalam tangki itu ditambah sebanyak 30 liter. Hitungkan isipadu, dalam liter, air dalam tangki itu pada akhir hari ke-10.

Jwp: 870

4. Rajah menunjukkan tiga segiempat sama berturutan dalam susunan menaik.



- (a) Tunjukkan **perimeter** bagi segiempat yang membentuk jangjang aritmetik. Seterusnya, nyatakan beza sepunya.
(b) Diberi $x = 8$ cm, cari
(i) Hasil tambah perimeter bagi 16 segiempat yang pertama.
(ii) Segiempat yang pertama mempunyai perimeter melebihi 210.

**Jwp: (a) $d = 8$
(b) (i) 1472
(ii) $n = 24$**

JANJANG GEOMETRI

1. Tentukan sama ada jujukan $5, -10, 20, -40, \dots$, ialah satu janjang geometri atau tidak dengan mencari nisbah sepunya. Jwp: $JG, r = -2$ 2. Cari hasil tambah hingga sebutan ketakterhinggaan bagi siri $3 + 1.5 + 0.75 + \dots$ Jwp: $S_{\infty} = 6$ 3. Diberi bahawa $9, 3, 1, \dots$, ialah satu janjang geometri. Cari sebutan kelima bagi janjang itu. Jwp: $T_5 = \frac{1}{9}$ 4. Sebutan pertama bagi suatu janjang geometri ialah 4 dan nisbah sepunya ialah $\frac{1}{2}$. Cari hasil tambah hingga ketakterhinggaan bagi janjang itu. Jwp: $S_{\infty} = 8$	5. Tiga sebutan pertama bagi suatu janjang geometri ialah $x + 56, x + 20$ dan $x - 4$. Cari (a) nilai x dan nisbah sepunya. (b) hasil tambah hingga sebutan ketakterhinggaan janjang itu. Jwp: (a) $x = 52, r = \frac{2}{3}$ (b) $S_{\infty} = 216$ 6. Hasil tambah tiga sebutan pertama suatu janjang geometri ialah 65 dan nisbah sepunya janjang itu ialah 3. (a) Cari hasil tambah 5 sebutan pertama selepas sebutan ketiga. (b) Cari sebutan keenam janjang itu. Jwp: (a) $a = 5, S_8 - S_3 = 16335$ (b) $T_6 = 1215$
--	--

KOLEKSI SOALAN PERCUBAAN

Kertas 1

1. During Merdeka Day Celebration, Some of form four students from MRSM Putrajaya are invited to perform a choir. The students will be arranged in the performance such that there will be 21 participant in the fifth row and the number of participant of each subsequent row is 3 more than the preceding row. If there are 140 form four students, find the maximum number of students that perform in the choir.

Semasa Sambutan Hari Kemerdekaan, sebilangan pelajar tingkatan empat dari MRSM putrajaya dijemput untuk membuat persembahan koir. Pelajar-pelajar akan disusun dalam persembahan tersebut dengan keadaan 21 orang peserta akan berada di baris kelima dan bilangan peserta pada baris yang seterusnya adalah lebih 3 orang daripada baris sebelumnya.

Jika terdapat 140 orang pelajar tingkatan empat, cari bilangan maksimum pelajar yang dapat membuat persembahan koir itu.

PPC MRSM 2019

Jwp: 126

[4 marks/ markah]

2. The first term of the geometric progression is 16 and all the terms are positive. The product of the first term and the eight term is equal to the fourth term.

Find the sum to infinity of this progression.

Sebutan pertama bagi suatu jangjang geometri ialah 16 dan semua sebutan sebelumnya adalah positif.

Hasil darab sebutan pertama dengan sebutan kelapan adalah sama dengan sebutan keempat.

Cari hasil tambah ketakterhinggaan bagi jangjang ini.

PPC MRSM 2019

Jwp: 32

[4 marks/ markah]

3. Determine whether the sequence of $\log_2 x$, $\log_2 x^3$, $\log_2 x^5$, ... is an arithmetic progression or geometric progression. Give your reason.

Tentukan sama ada jujukan $\log_2 x$, $\log_2 x^3$, $\log_2 x^5$, ... adalah jangjang aritmetik atau jangjang geometri.

Berikan alasan anda.

PPC MPP3 2019

Jwp: Jangjang Aritmetik, $d = \log_2 x^2$

[2 marks/ markah]

4. Given $4m \cdot \frac{9}{m}$, $3k$ are three consecutive terms of a geometric progression. Express k in terms of m .

Diberi $4m \cdot \frac{9}{m}$, $3k$ adalah tiga sebutan berturutan suatu jangjang geometri. Ungkapkan k dalam sebutan m .

PPC MPP3 2019

Jwp: $k = \frac{27}{4m^3}$

[3 marks/ markah]

5. Every year, the price of a house increases 10% from the price of the previous year. At the beginning, the house price was RM70 000.

Pada setiap tahun, harga sebuah rumah bertambah sebanyak 10% daripada harga pada tahun sebelumnya. Pada mulanya, harga sebuah rumah ialah RM70 000.

- (a) Express the price of the house in the n th year in terms of n .

Ungkapkan harga rumah itu pada tahun ke- n dalam sebutan n .

- (b) Hence, find the price of the house in the tenth year, correct to the nearest RM.

Seterusnya, cari harga rumah itu pada tahun kesepuluh, betul kepada RM terdekat.

PPC Batu Pahat 2019

Jwp: (a) $T_n = 70\,000(1.1)^{n-1}$

(c) $T_{10} = 70\,000(1.1)^{10-1}$
 $= 165056$

[3 marks/ markah]

6. Sum of the first n term for arithmetic progression is $S_n = \frac{n}{2}(4n + 5)$. Find the sixth term.

Hasil tambah n sebutan pertama bagi suatu jangjang aritmetik ialah $S_n = \frac{n}{2}(4n + 5)$. Cari sebutan keenam.

PPC MPPSM (PP) 2019

Jwp: 24.5

[2 marks/ markah]

7. The height of a plant increases by 7% every month. Given that the height of the plant was initially h cm. After n months, the height of the plant exceeds 3 times its height. What is the minimum value for n ?

Tinggi sejenis tumbuhan bertambah 7% setiap bulan. Diberi bahawa tinggi tumbuhan itu pada awalnya ialah h cm. Selepas n bulan, tinggi tumbuhan itu melebihi 3 kali ganda daripada tinggi awalnya. Apakah nilai minimum bagi n ?

PPC MPPSM (PP) 2019

Jwp: 18

[3 marks/ markah]

8. Sarah's monthly saving form an arithmetic progression $p + 9$, $2p + 10$ and $7p - 1$. Find

Tabung bulanan Sarah membentuk suatu jangjang aritmetik $p + 9$, $2p + 10$ dan $7p - 1$. Cari

- (a) the value of p ,

nilai bagi p ,

- (b) the sum of Sarah's saving at first quarter of the year.

Jumlah tabungan Sarah pada suku tahun pertama.

PPC Selangor 2019

Jwp: $p = 3$, Jumlah = 48

[4 marks/ markah]

9. The third term and the fifth term of a geometric progression is $\frac{1}{32}$ and $\frac{1}{2048}$, where value of the common ratio is positive. Find

Sebutan ketiga dan kelima suatu jangjang geometri ialah $\frac{1}{32}$ dan $\frac{1}{2048}$, dengan keadaan nilai nisbah sepunya adalah positif. Cari

- (a) the first term,
sebutan pertama,
 (b) the common ratio
nisbah sepunya.

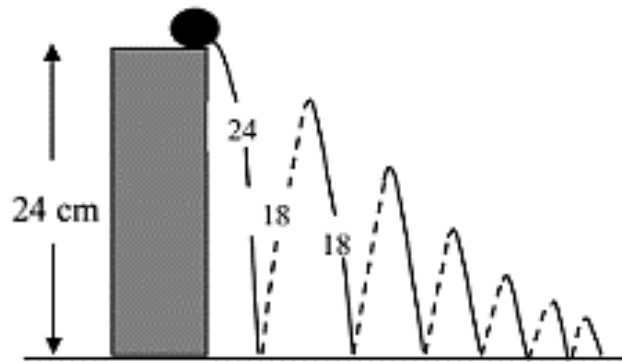
PPC Selangor 2019

Jwp: $a = 2, r = \frac{1}{8}$

[4 marks/ markah]

10. Diagram 10 shows the situation of bouncing ball.

Rajah 10 menunjukkan keadaan sebiji bola yang melantun.



Diagram/ Rajah 10

The ball is dropped from a table that is 24cm high. The ball always rebounds $\frac{3}{4}$ of the distance dropped. Find the total distance travelled by the ball when it finally comes to rest.

Bola itu dilepaskan dari sebuah meja yang tingginya 24cm. Bola itu sentiasa melantun balik $\frac{3}{4}$ daripada tingginya semasa jatuh. Cari jumlah jarak yang dilalui oleh bola itu apabila berhenti melantun.

PPC Johor 2019

Jwp: 168

[4 marks/ markah]

11. The sixth term of an arithmetic progression is 47 and the sum of the first 10 terms is 410. Find the first term and common difference of the progression.

Sebutan keenam suatu jangjang aritmetik ialah 47 dan hasil tambah 10 sebutan pertama ialah 410. Cari sebutan pertama dan beza sepunya bagi jangjang itu.

PPC Johor 2019

Jwp: $a = -13, d = 12$

[3 marks/ markah]

12. The following information refers to the sum of terms of a geometric progression.
Maklumat berikut merujuk kepada hasil tambah sebutan-sebutan suatu jangjang geometri.

$$0.216216216 \dots = 0.216 + p + q + \dots$$

Where p and q are constants.

Dengan keadaan p dan q ialah

Determine

Tentukan

- (a) the value of p and q
nilai p dan q
(b) the common ratio of the progression
nisbah sepunya jangjang itu

PPC Johor 2019

Jwp: (a) $p = 0.000216, q = 0.000000216$

(b) 0.001

[1 mark/ *markah*]

13. The 2nd term of a geometric progression is 12 and the sum of the first 2 terms is 34. Find the common ratio of the progression.

Sebutan ke-2 bagi suatu jangjang geometri ialah 12 dan hasil tambah 2 sebutan pertama ialah 34. Cari nisbah sepunya bagi jangjang itu.

PPC Kelantan 2019

Jwp: $r = 2$

[3 marks/ *markah*]

14. The 2nd term of a geometric progression is 12 and the sum of the first 2 terms is 34. Find the common ratio of the progression.

Sebutan ke-2 bagi suatu jangjang geometri ialah 12 dan hasil tambah 2 sebutan pertama ialah 34. Cari nisbah sepunya bagi jangjang itu.

PPC Kelantan 2019

Jwp: $a = 7, d = 5$

[3 marks/ *markah*]

15. For a geometric progression, the sum of first two terms is 60 and the third term exceeds the first term by 30. Find the common ratio and the first term of the geometric progression.

Untuk jangjang geometri, di mana jumlah 2 sebutan pertamanya ialah 60 dan sebutan ketiga melebihi sebutan pertama sebanyak 30. Cari nisbah sepunya dan sebutan pertama untuk jangjang geometri ini.

Jwp: $r = \frac{3}{2}$

[4 marks/ *markah*]

16. An arithmetic progression has 9 terms. The sum of the first four terms is 48 and the sum of all the odd number terms is 110. Find the first term and the common difference.

Suatu jangjang aritmetik mempunyai 9 sebutan. Jumlah empat sebutan pertamanya ialah 48 dan jumlah semua sebutan ganjilnya ialah 110. Cari sebutan yang pertama dan beza sepunya.

Jwp: $a = 6, d = 4$
[4 marks/ markah]

17. Razid had just finished his SPM examination. He applied for a job from a company. The company offered him an initial salary of RM 66 000 per annum with 10% yearly increment from the basic salary. Razid planned to save 35% of his salary to further his studies after working for 6 years. Calculate his total savings for his studies after working 6 years. Give your answer correct to the nearest RM.

Razid baru saja selesai menduduki peperiksaan SPM. Dia memohon pekerjaan daripada sebuah syarikat. Syarikat tersebut menawarkan gaji tahunan permulaan sebanyak RM 66000 dengan 10% kenaikan gaji tahunan daripada gaji pokok. Razid bercadang untuk menyimpan 35% daripada gajinya untuk melanjutkan pelajaran selepas bekerja selama 6 tahun. Hitung jumlah simpanan untuk pengajiannya selepas bekerja selama 6 tahun. Berikan jawapan anda betul kepada RM terhampir.

Jwp: $S_6 = 509230.26$
Simpanan = 178230.59
[4 marks/ markah]

18. Aisy Rafhanah saved RM 100 000 in the fixed deposit at Maybank. After n years her savings become $100000 \left(\frac{7}{5}\right)^n$. Find total of years where her saving turn to be more than 3 million for the first time.

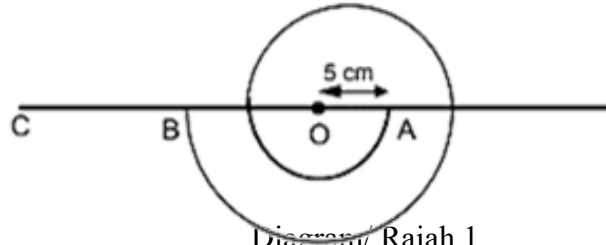
Aisy Rafhanah menyimpan RM 100 000 di dalam simpanan tetap di Maybank. Selepas n tahun wang simpanannya menjadi $100000 \left(\frac{7}{5}\right)^n$. Cari bilangan tahun di mana wang simpanannya buat pertama kali melebihi 3 juta.

Jwp: $n = 11$
[4 marks/ markah]

KERTAS 2

1. Diagram 3 shows a spiral pattern obtained when a piece of wire is bent into several semicircles with the condition the radius are increased by 4 cm from the previous semicircles.

Rajah 3 menunjukkan suatu corak spiral yang terhasil apabila seutas dawai dibengkokkan kepada beberapa semibulatan berterusan dengan syarat jejari separuh bulatan bertambah 4 cm dari semibulatan yang sebelumnya.



Diagram/ Rajah 1

Given the radius of the first semicircle is 5 cm with centre O and AOBC is a straight line.

Diberi jejari semibulatan yang pertama ialah 5 cm dan berpusat O. AOBC ialah garis lurus.

- (a) Determine which semicircle with the arc length 121π .

Tentukan semibulatan yang beberapa mempunyai panjang lengkok 121π .

- (b) If $OC = 145$ cm, find the length of the wire needed, in term of π , so that the end of the wire will touch the point C.

Jika $OC = 145$ cm, cari jumlah panjang dawai yang diperlukan, dalam sebutan π supaya hujung dawai spiral itu menyentuh titik C.

PPC Batu Pahat 2019

Jwp: (a) $5\pi, 9\pi, 13\pi, \dots; d = 4\pi, n = 30$

(b) $n = 36, S_{36} = 2700\pi$

[7 marks/ markah]

2. A rectangular piece of paper can be folded in half by 12 times. Given the thickness of the paper is 0.0075cm.

Sekeping kertas berbentuk segiempat tepat boleh dilipat separuh sebanyak 12 kali. Diberi ketebalan kertas itu ialah 0.0075cm.

- (a) Show that the thickness of the paper fold when the paper folds half into a geometric progression and state the common ratio.

Tunjukkan bahawa ketebalan lipatan kertas itu apabila kertas itu dilipat separuh membentuk suatu jangjang geometri dan seterusnya nyatakan nisbah sepunyaanya.

- (b) Find the thickness of the paper when the paper folds half by 10 times.

Cari ketebalan lipatan kertas itu apabila kertas itu dilipat separuh sebanyak 10 kali.

- (c) Determine the minimum number of times the paper is folded in half so that the thickness of fold is more than 15cm.

Tentukan bilangan kali minimum kertas itu dilipat separuh supaya ketebalan lipatan kertas itu melebihi 15cm.

PPC PP 2019

Jwp: (a) $0.0015, 0.03, 0.06, \dots; r = 2$

(b) $T_{10} = 7.68$; (c) $n = 11$

[7 marks/ markah]

3. Iskandar buys a used car. At the end of the first year, the cost of maintaining the car is RM1000. At the end of the next year the maintenance cost increased by 10% from the previous year.

Iskandar membeli sebuah kereta terpakai. Pada akhir tahun pertama kos penyelenggaraan keretanya adalah RM1000. Setiap akhir tahun berikutnya kos penyelenggaraan keretanya akan bertambah 10% daripada tahun sebelumnya.

Calculate

Hitungkan

- (a) The car maintenance costs at the end of the sixth year.

Kos penyelenggaraan kereta pada akhir tahun ke enam.

- (b) At the end of which year the cost of maintenance exceeds RM2000.

Pada akhir tahun ke berapakah kos penyelenggaraannya melebihi RM2000.

- (c) The total cost of car maintenance from the end of the fifth year to the end of the tenth year in nearest ringgit.

Jumlah kos penyelenggaraan kereta daripada akhir tahun ke lima hingga akhir tahun ke sepuluh dalam ringgit terhampir.

PPC Johor 2019

Jwp: (a) $a = 1000$, $r = 1.1$, $T_6 = 1610.51$

(b) $n = 9$;

(c) $S_{10}-S_4 = 11300$

[8 marks/ markah]

4. A tennis ball is released from a height of 800 cm above the floor. The ball will bounce back and reaches a height of 60% of the previous height after it hits on the floor. The ball continue bouncing in this way until it stops. Calculate

Sebiji bola tenis dilepaskan dari ketinggian 800 cm daripada lantai. Bola itu akan melantun balik dan mencapai 60% daripada ketinggian sebelumnya selepas menyentuh lantai. Bola itu terus melantun sehingga ia berhenti. Kira :

- (a) the number of bounces when the maximum height of the ball from the floor is less than 100 cm for the first time.

Bilangan lantunan apabila ketinggian maximum lantunan bola itu adalah kurang dari 100cm selepas menyentuh lantai

- (b) the total distance , in cm, travelled by the ball until it stops.

Jumlah jarak pergerakan bola itu dalam cm sehingga ia berhenti.

Jwp: (a) $n = 5$

(b) $d = 3200\text{cm}$

[8 marks/ markah]



MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

9. HUKUM LINEAR



NOTA

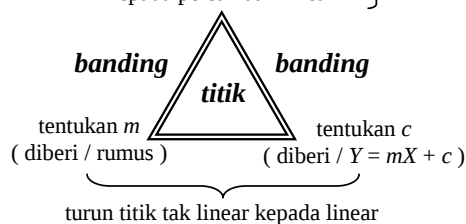
LANGKAP PENYELESAIAN → KERTAS 2

- bina jadual, berdasarkan paksi-X dan paksi-Y yang dinyatakan.
- plotkan graf Y melawan X , berdasarkan skala yang diberi. ←
- lukis garis lurus penyuaiian terbaik. ... (a)
 - ⇒ cari m ~ pilih dua titik pada garis penyuaiian terbaik
 - ⇒ cari c ~ pintasan-y bagi garis penyuaiian terbaik
- turun persamaan bukan linear kepada persamaan linear. ... (b)
 - ⇒ tentukan m
 - ⇒ tentukan c
- bandingkan nilai m dan c bagi (a) dan (b) & selesaian.
- daripada graf :
 - ⇒ diberi nilai x ~ cari nilai y
 - ⇒ diberi nilai y ~ cari nilai x

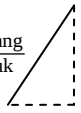
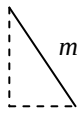
rujuk

LANGKAP PENYELESAIAN → KERTAS 1

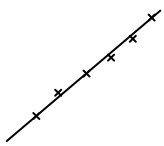
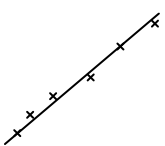
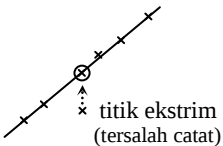
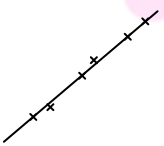
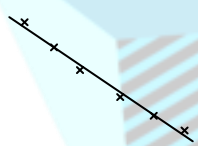
turun persamaan bukan linear
kepada persamaan linear } $Y = mX + c$



MINDA :

Persamaan Garis Lurus, $y = mx + c$; dengan m = kecerunan, c = pintasan-y	
$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$m = -\left(\frac{\text{pintasan-y}}{\text{pintasan-x}}\right)$
$m = \frac{\text{jarak mencancang}}{\text{jarak mengufuk}}$ 	 $m = -\left(\frac{\text{jarak mencancang}}{\text{jarak mengufuk}}\right)$

Hukum Logaritma		
$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$	$\log_a x^n = n \log_a x$
$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	

Garis Lurus Penyuaiian Terbaik				
melalui 3 titik  SPM 2010	melalui 2 titik  SPM 2016	melalui 4 titik  SPM 2017	melalui 4 titik  SPM 2018	melalui 2 titik  SPM 2019



=====

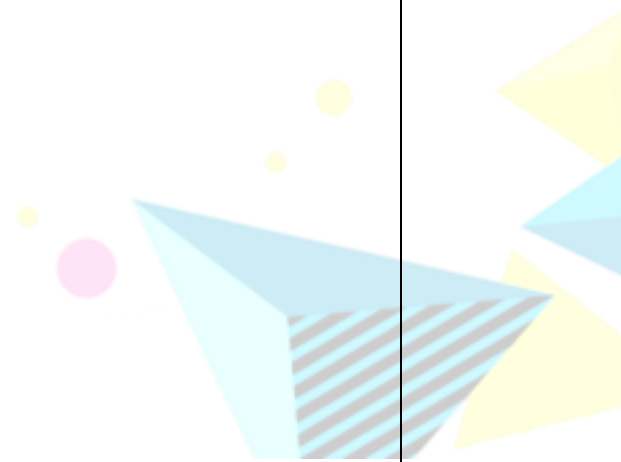
**** KEMAHIRAN UTAMA **** : menurunkan persamaan tak linear kepada linear

=====

Turunkan setiap hubungan tak linear yang berikut dalam bentuk linear, $Y = mX + c$

⇒ **bentuk 1 ~ MENGGUNAKAN PENDARABAN @ PEMBAHAGIAN**

(1) $y = ax^2 + bx \rightarrow Y = \frac{y}{x}, X = x$	(2) $\frac{y}{x} = px + \frac{q}{x} \rightarrow Y = y, X = x^2$
(3) $y = \frac{p}{\sqrt{x}} + q\sqrt{x} \rightarrow Y = y\sqrt{x}, X = x$	(4) $y - \sqrt{h} = \frac{hk}{x} \rightarrow Y = xy, X = x$
(5) $\frac{x+3}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \rightarrow Y = y^2, X = x + 3$	(6) $\frac{p}{y} = \frac{q}{x^2} - 1 \rightarrow Y = \frac{1}{y}, X = \frac{1}{x^2}$



$$(7) \quad y = \frac{a}{x-b} \rightarrow Y = \frac{1}{y}, X = x$$

$$(8) \quad nx = py + xy \rightarrow Y = \frac{1}{y}, X = \frac{1}{x}$$

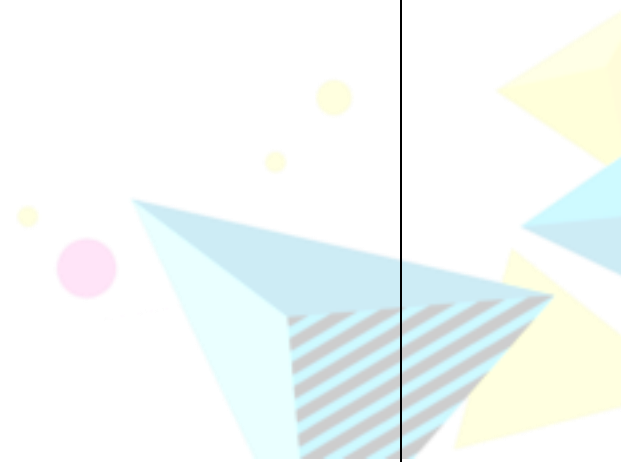
$$(9) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow Y = T^2, X = L$$

$$(10) \quad 4kx = (y-h)^2 \rightarrow Y = y, X = \sqrt{x}$$



⇒ **bentuk 2 ~ MENGGUNAKAN HUKUM LOGARITMA**

(1) $y = ab^x \rightarrow Y = \log_{10} y, X = x$	(2) $y = 10^{a+bx^2} \rightarrow Y = \log_{10} y, X = x^2$
(3) $y = hk^{2x} \rightarrow Y = \log_{10} y, X = x$	(4) $y = \frac{k}{h^x} \rightarrow Y = \log_{10} y, X = x$
(5) $y = pq^{x-2} \rightarrow Y = \log_{10} y, X = x - 2$	(6) $y = \frac{p}{k^{x+1}} \rightarrow Y = \log_{10} y, X = x + 1$





(7) $y = (1 + k)x^{\frac{h}{2}} \rightarrow Y = \log_{10} y, X = \log_{10} x$

(8) $y = \frac{a}{b\sqrt{x}} \rightarrow Y = \log_{10} y, X = \log_{10} x$



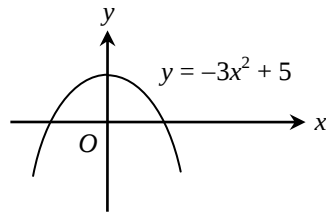
LATIHAN KERTAS 1

[0 – 1 soalan → 0 – 4 markah]

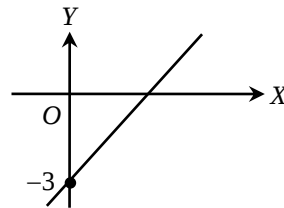
Mengaplikasikan hukum linear kepada hubungan tak linear.

⇒ aplikasi 1

1) Rajah (a) menunjukkan graf lengkung $y = -3x^2 + 5$. Rajah (b) menunjukkan graf garis lurus yang diperoleh apabila $y = -3x^2 + 5$ diungkap dalam bentuk linear $Y = 5X + c$.



Rajah (a)



Rajah (b)

Ungkapkan X dan Y dalam sebutan x dan / atau y .

(Jwp: $Y = \frac{y}{x^2}$, $X = \frac{1}{x^2}$)

[3 markah] [2006, No.11]

Jawapan :

2) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $\frac{x}{y} = \frac{p}{x} + 5x$, dengan keadaan p ialah pemalar. Apabila persamaan $\frac{x}{y}$

$= \frac{p}{x} + 5x$ diungkapkan dalam bentuk linear, garis lurus yang diperolehi ialah

$$Y = pX + \frac{q}{2}.$$

(a) Ungkapkan X dan Y dalam sebutan x dan / atau y .

(Jwp: $Y = \frac{1}{y}$, $X = \frac{1}{x^2}$)

(b) Cari nilai q .

(Jwp: 10)

[4 markah] [Ramalan]

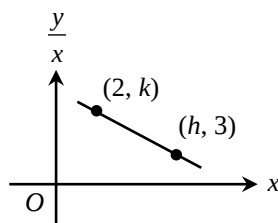
Jawapan :

(a)

(b)

⇒ **aplikasi 2**

3) Rajah menunjukkan graf garis lurus $\frac{y}{x}$ melawan x .

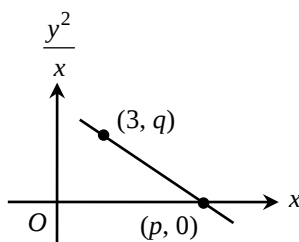


Diberi $y = 6x - x^2$, hitungkan nilai k dan h .

(Jwp : $h = 3, k = 4$)
[4 markah] [2004, No.13]

Jawapan :

4) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y^2 = 2x(10 - x)$. Graf garis lurus diperoleh dengan memplotkan $\frac{y^2}{x}$ melawan x , seperti ditunjukkan pada rajah.



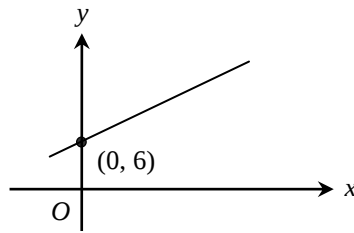
Cari nilai p dan nilai q .

(Jwp : $p = 10, q = 14$)
[3 markah] [2007, No.12]

Jawapan :

⇒ **aplikasi 3 ~ 1**

5) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $hy = kx^2 + hk$. Graf garis lurus diperoleh dengan memplotkan y melawan x^2 seperti yang ditunjukkan dalam rajah.



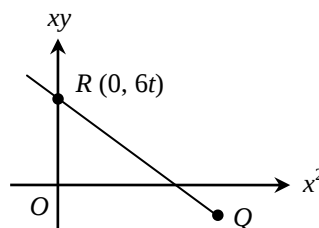
Diberi kecerunan garis lurus itu ialah 3, cari nilai h dan nilai k .

(Jwp : $h = 2, k = 6$)

[3 markah] [2010, No.12]

Jawapan :

6) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh $3y = (p-1)x + \frac{12}{x}$, dengan keadaan p ialah pemalar. Rajah menunjukkan garis lurus QR yang diperoleh dengan memplot xy melawan x^2 .



(a) Ungkapkan persamaan $3y = (p-1)x + \frac{12}{x}$ dalam bentuk linear, yang digunakan untuk memperoleh graf garis lurus seperti yang ditunjukkan dalam rajah.

[Jwp : $xy = \left(\frac{p-1}{3}\right)x^2 + 4$]

(b) Diberi kecerunan QR ialah -2 , cari nilai p dan nilai t .

(Jwp : $p = -5, t = \frac{2}{3}$)

[4 markah] [2011, No.12]

Jawapan :

(a)

(b)

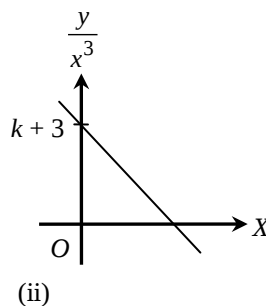
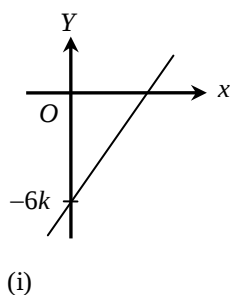
7) Diberi bahawa pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $x - py = qxy$ dengan keadaan p dan q adalah pemalar. Jika paksi mencancang diwakili oleh $\frac{1}{y}$. Terangkan bagaimana p dan q dapat diperolehi.

[3 markah] [**Ramalan**]

Jawapan :

$\Rightarrow$ **aplikasi 4**

8) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $\frac{y}{x} = px^2 - qx$ dengan keadaan p dan q ialah pemalar. Rajah (i) dan Rajah (ii) menunjukkan graf garis lurus yang diperolehi dengan memplot hubungan dari persamaan itu.



Ungkapkan p dalam sebutan q .

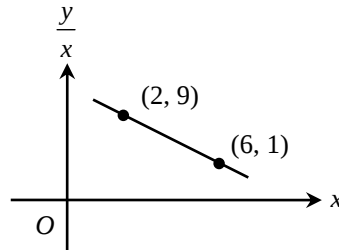
(Jwp : $p = \frac{q+18}{6}$)

[3 markah] [**2019, No.11**]

Jawapan :

⇒ **aplikasi 5**

9) x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = px^2 + qx$, dengan keadaan p dan q adalah pemalar. Graf garis lurus diperoleh dengan memplot $\frac{y}{x}$ melawan x , seperti yang ditunjukkan dalam rajah.

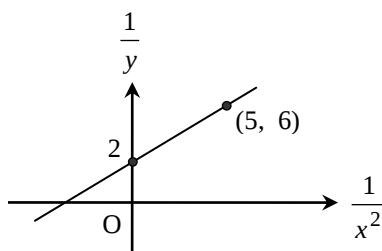


Hitungkan nilai p dan q .

(Jwp : $p = -2$, $q = 13$)
[4 markah] [2003, No.10]

Jawapan :

10) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $\frac{p}{y} = 1 - \frac{q}{x^2}$. Rajah menunjukkan graf garis lurus yang diperoleh dengan memplot $\frac{1}{y}$ melawan $\frac{1}{x^2}$.



Cari nilai

(a) p ,

(b) q .

Jawapan :

(a)

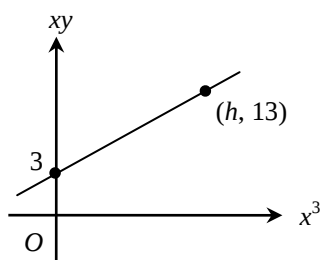
(b)

(Jwp : $\frac{1}{2}$)

(Jwp : $-\frac{2}{5}$)

[4 markah] [2012, No.12]

11) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = 2x^2 - \frac{q}{x}$, dengan keadaan q ialah pemalar. Suatu gatis lurus diperoleh dengan memplotkan xy melawan x^3 , seperti ditunjukkan pada Rajah.

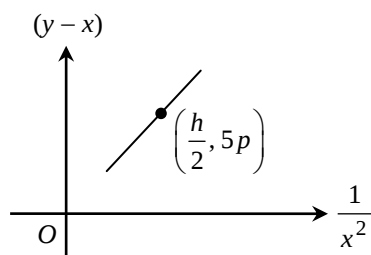


Find the value of h and of q .

(Jwp : $h = 5, q = -3$)
[3 markah] [2016, No.16]

Jawapan :

12) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = x + \frac{r}{x^2}$, dengan keadaan r ialah pemalar. Rajah menunjukkan graf garis lurus yang diperoleh dengan memplotkan $(y - x)$ melawan $\frac{1}{x^2}$.

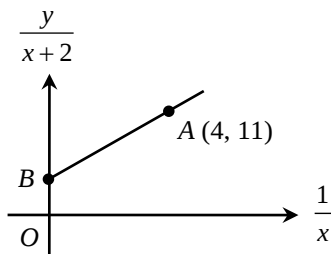


Ungkapkan h dalam sebutan p dan r .

(Jwp : $h = \frac{10p}{r}$)
[3 markah] [2017, No.19]

Jawapan :

13) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = (x + 2) \left(\frac{m}{x} + 3 \right)$, dengan keadaan m ialah pemalar. Apabila memplotkan graf $\frac{y}{x+2}$ melawan $\frac{1}{x}$, satu garis lurus melalui titik A dan B diperolehi.



Cari

(a) koordinat titik B ,

(b) nilai m .

(Jwp : 2)

[4 markah] [**Ramalan**]

Jawapan :

(a)

(b)

14) Diketahui bahawa x dan y dihubungkan oleh persamaan $\frac{y}{x^2} = ax + \frac{b}{x}$ dengan keadaan a dan b ialah pemalar. Apabila graf

$\frac{y}{x}$ melawan x^2 diplotkan, satu garis lurus diperolehi. Diberi garis itu yang melalui titik $(4, 6)$ dan kecerunan garis ini ialah $\frac{1}{2}$. Cari

nilai a dan b .

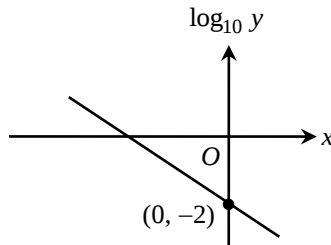
(Jwp : $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$)

[4 markah] [**Ramalan**]

Jawapan :

⇒ aplikasi 3 ~ 2

15) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = \frac{k}{5^x}$, dengan keadaan k ialah pemalar. Rajah menunjukkan graf garis lurus yang diperoleh dengan memplot $\log_{10} y$ melawan x .



(a) Ungkapkan persamaan $y = \frac{k}{5^x}$ dalam bentuk linear yang digunakan untuk memplot graf garis lurus seperti ditunjukkan dalam rajah.

(b) Cari nilai k .

(Jwp : $\frac{1}{100}$)

[4 markah] [2008, No.12]

Jawapan :

(a)

(b)

16) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = \frac{1}{2}p^x$, dengan keadaan p ialah pemalar. Satu graf garis lurus dengan kecerunan 3 diperoleh dengan memplot $\log_2 y$ melawan x . Cari

(a) nilai p ,

(b) pintasan- y bagi garis lurus itu.

(Jwp : 8)

(Jwp : -1)

[4 markah] [**Ramalan**]

Jawapan :

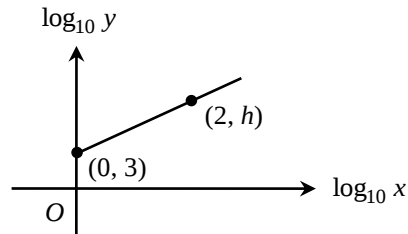
(a)

(b)

⇒ aplikasi 5 ~ 2

17) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = kx^4$, dengan keadaan k ialah pemalar.

- Tukarkan persamaan $y = kx^4$ kepada bentuk linear.
- Rajah menunjukkan graf lurus yang diperoleh dengan memplot $\log_{10} y$ melawan $\log_{10} x$.



Carikan nilai

- $\log_{10} k$,
- h .

(Jwp: 3)

(Jwp: 11)

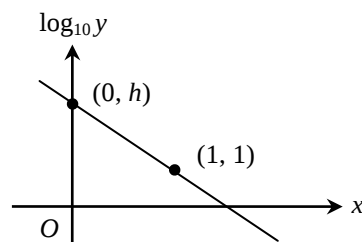
[4 markah] [2005, No.13]

Jawapan :

-
- (i)

(ii)

18) Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = 1000p^x$, dengan keadaan p ialah pemalar. Rajah menunjukkan graf garis lurus yang diperoleh dengan memplot $\log_{10} y$ melawan x .



- Ungkapkan persamaan $y = 1000p^x$ dalam bentuk linear yang digunakan untuk memperoleh graf garis lurus seperti yang ditunjukkan dalam rajah di atas.
[Jwp : $y = (\log_{10} p)(x) + 3$]
- Cari nilai h dan nilai p .

(Jwp : $h = 3, p = \frac{1}{100}$)

[4 markah] [2013, No.12]

Jawapan :

-
- (b)

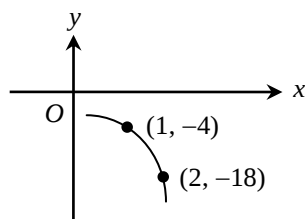
19) Diketahui bahawa x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = ax^n$ dengan a dan n ialah pemalar. Apabila graf $\log_2 y$ bertentangan $\log_2 x$ diplotkan, satu garis lurus yang melalui titik $(1,5)$ dan $(3,11)$ diperolehi. Cari nilai a dan n .
(Jwp : $a = 4$, $n = 3$)

[4 markah] [**Ramalan**]

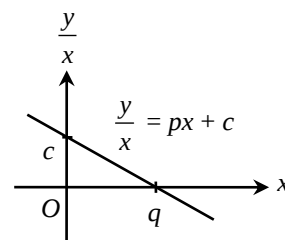
Jawapan :

⇒ aplikasi 6

20) Rajah (a) menunjukkan satu graf bagi satu persamaan bukan linear. Rajah (b) menunjukkan graf garis lurus yang diperoleh apabila persamaan bukan linear diungkapkan dalam bentuk linear.



Rajah (a)



Rajah (b)

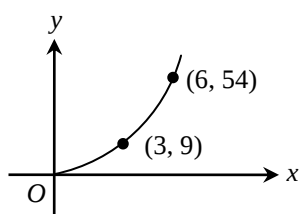
Hitungkan nilai c , p dan q .

(Jwp : $p = -5$, $q = \frac{1}{5}$, $c = 1$)

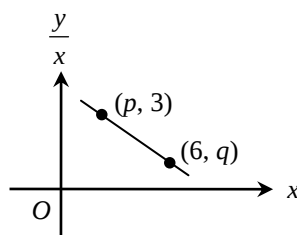
[4 markah] [**Ramalan**]

Jawapan :

21) Rajah (a) menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = ab^x$ dengan keadaan a dan b ialah pemalar.



Rajah (a)



Rajah (b)

Graf bagi lengkung $y = ab^x$ ditukar kepada bentuk linear, satu garis lurus diperolehi seperti yang ditunjukkan dalam rajah (b). Cari

(a) nilai p dan q ,

(Jwp : $p = 3, q = 9$)

(b) nilai a dan b .

(Jwp : $a = 2, b = -3$)

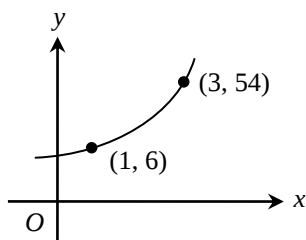
[4 markah] **[Ramalan]**

Jawapan :

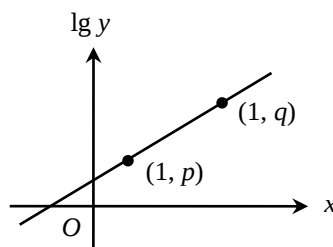
(a)

(b)

22) Rajah (a) menunjukkan lengkung $y = ab^x$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar. Rajah (b) menunjukkan graf garis lurus yang diperolehi apabila $y = ab^x$ diungkapkan dalam bentuk linear.



Rajah (a)



Rajah (b)

Find

(a) nilai p dan q ,

(Jwp : $p = 0.7782, q = 1.7324$)

(b) nilai a dan b .

(Jwp : $a = 2, b = 3$)

[4 markah] **[Ramalan]**

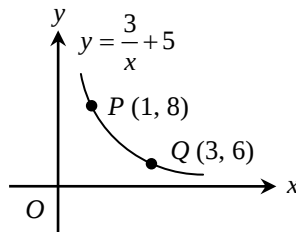
Jawapan :

(a)

(b)

⇒ **aplikasi 7**

23) Rajah menunjukkan sebahagian graf $y = \frac{3}{x} + 5$ yang melalui titik $P(1, 8)$ dan $Q(3, 6)$.

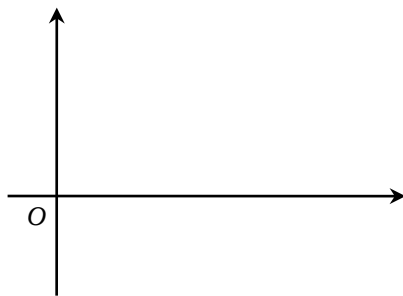


Lakarkan graf xy melawan x dengan menunjukkan titik P dan Q .

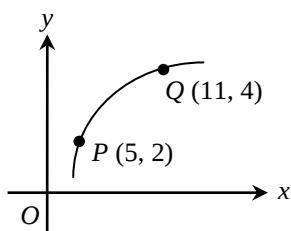
[Jwp : $P(1, 8), Q(3, 18)$]

[3 markah] **[Ramalan]**

Jawapan :



24) Rajah menunjukkan suatu lengkung. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan linear $y^2 = Ax + B$, dengan keadaan A dan B ialah pemalar.



(a) Hitung nilai A dan B .

(Jwp : $A = 2, B = -6$)

(b) Lakarkan graf linear y^2 melawan x .

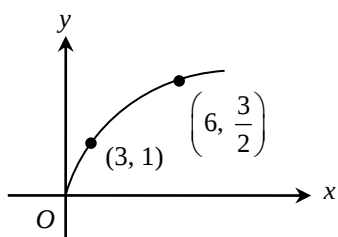
[4 markah] **[Ramalan]**

Jawapan :

(a)

(b)

25) Rajah menunjukkan suatu lengkung. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = \frac{bx}{x+ab}$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar.



(a) Lakarkan graf linear $\frac{1}{y}$ melawan $\frac{1}{x}$.

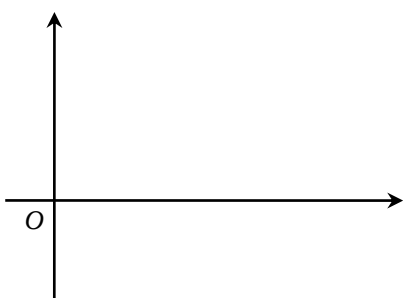
(b) Hitung nilai a dan b .

(Jwp : $a = 2, b = 3$)
[4 markah] [**Ramalan**]

Jawapan :

(a)

(b)



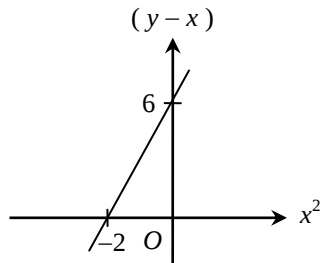
=====

Membentuk persamaan bagi garis lurus penyuaiian terbaik.

=====

⇒ **bentuk 1**

1) Rajah menunjukkan graf garis lurus yang diperoleh dengan memplot $(y - x)$ melawan x^2 .

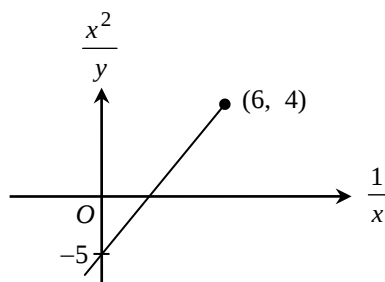


Ungkapkan y dalam sebutan x .

(Jwp : $y = 3x^2 + x + 6$)
[3 markah] [2015, No.10]

Jawapan :

2) Rajah menunjukkan graf garis lurus $\frac{x^2}{y}$ melawan $\frac{1}{x}$.

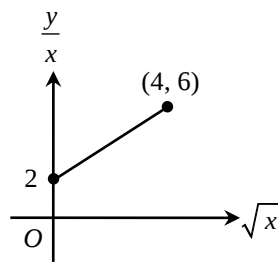


Berdasarkan rajah, ungkapkan y dalam sebutan x .

(Jwp : $y = \frac{2x^3}{3-10x}$)
[3 markah] [2018, No.13]

Jawapan :

3) Rajah menunjukkan graf garis lurus $\frac{y}{x}$ melawan $\sqrt{x}$.



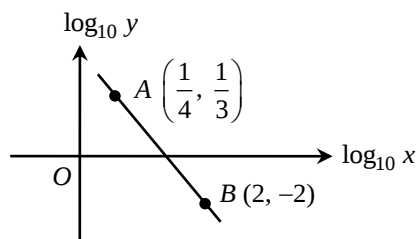
Ungkapkan y dalam sebutan x .

(Jwp : $y = x^{\frac{3}{2}} + 2x$)
[3 markah] [**Ramalan**]

Jawapan :

⇒ **bentuk 2**

4) Rajah menunjukkan graf garis lurus yang diperoleh dengan memplot $\log_{10} y$ melawan $\log_{10} x$.



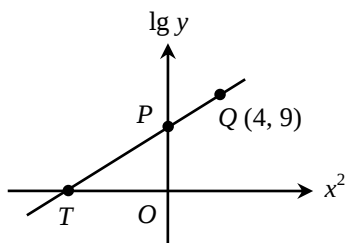
Cari hubungan antara y dan x .

(Jwp : $y^3 = \frac{100}{x^4}$)

[4 markah] [**Ramalan**]

Jawapan :

5) Rajah menunjukkan graf garis lurus $\lg y$ melawan x^2 .



Diberi kecerunan garis lurus PQ ialah 2, dan P terletak pada paksi- $\lg y$.

(a) Cari coordinates titik P .

(b) Ungkapkan y dalam sebutan x .

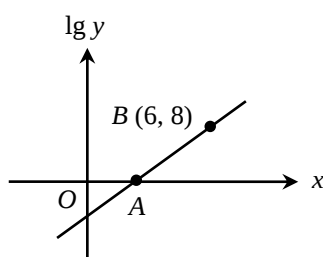
(Jwp : $y = 10^{2x^2+1}$)
[4 markah] **[Ramalan]**

Jawapan :

(a)

(b)

6) Rajah menunjukkan graf $\lg y$ melawan x . Diberi panjang $AB = 4\sqrt{5}$ unit dan titik A terletak pada paksi- x .

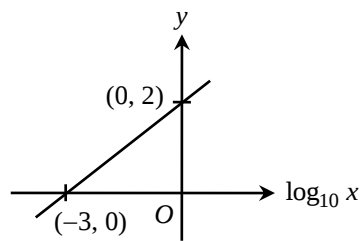


Ungkapkan y dalam sebutan x .

(Jwp : $y = 10^{2x-4}$)
[3 markah] **[Ramalan]**

Jawapan :

7) Rajah menunjukkan graf garis lurus y melawan $\log_{10} x$.



Diberi garis lurus melalui titik $(-3, 0)$ dan $(0, 2)$.
Cari nilai y apabila $x = 1000$.

(Jwp : 4)
[3 markah] [**Ramalan**]

Jawapan :

LATIHAN KERTAS 2

[Bahagian B → 10 markah]

Melukis garis lurus penyuaiian terbaik bagi graf hubungan linear.

Mentafsir maklumat berdasarkan garis lurus penyuaiian terbaik.

Menyelesaikan masalah yang melibatkan hukum linear.

⇒ **bentuk 1a** ~ aplikasi hukum linear kepada hubungan tak linear

1) Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu ujikaji. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = px + \frac{r}{px}$, dengan keadaan p dan r adalah pemalar.

x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	5.5
y	5.5	4.7	5.0	6.5	7.7	8.4

(a) Plotkan xy melawan x^2 , dengan menggunakan skala 2 cm kepada 5 unit pada kedua-dua paksi. Seterusnya, lukiskan garis lurus penyuaiian terbaik. [5 markah]

(b) Gunakan graf anda dari (a) untuk mencari nilai

(i) p ,

(Jwp : 1.373)

(ii) r .

(Jwp : 5.488)

[5 markah]

[2005, No.7]

Jawapan : RUJUK GRAF

2). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = 2kx^2 + \frac{p}{k}x$, dengan keadaan p dan k adalah pemalar.

x	2	3	4	5	6	7
y	8	13.2	20	27.5	36.6	45.5

(a) Plot $\frac{y}{x}$ melawan x , dengan menggunakan 2 cm kepada 1 unit pada kedua-dua paksi.

Seterusnya, lukis garis lurus penyuaiian terbaik.

[4 markah]

(b) Gunakan graf di (a) untuk mencari nilai

(i) p ,

(Jwp : 0.75)

(ii) k ,

(Jwp : 0.25)

(iii) y apabila $x = 1.2$.

(Jwp : 4.32)

[6 markah]

[2007, No.7]

Jawapan : RUJUK GRAF

3) Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada suatu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh $\frac{k}{y} = \frac{p}{x} + 1$, dengan keadaan k dan p ialah pemalar.

x	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
y	2.502	0.770	0.465	0.385	0.351	0.328

(a) Berdasarkan jadual, bina satu jadual bagi nilai-nilai $\frac{1}{x}$ dan $\frac{1}{y}$. [2 markah]

(b) Plot $\frac{1}{y}$ melawan $\frac{1}{x}$, menggunakan skala 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi- $\frac{1}{x}$ dan 2 cm kepada 0.5 unit pada paksi- $\frac{1}{y}$ -axis. Seterusnya, lukis satu garis lurus penyuaiian terbaik. [3 markah]

(c) Guna graf di (b) untuk mencari nilai

(i) k , (Jwp : 0.2564)

(ii) p , (Jwp : -1.333)

[5 markah]

[2009, No.8]

Jawapan : RUJUK GRAF

4) Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $\frac{n}{y} = px + 1$, dengan keadaan n dan p ialah pemalar.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	0.303	0.364	0.465	0.588	0.909	1.818

(a) Berdasarkan jadual, bina satu jadual bagi nilai-nilai $\frac{1}{y}$. [1 markah]

(b) Plot $\frac{1}{y}$ melawan x , dengan menggunakan skala 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 0.5 unit pada paksi- $\frac{1}{y}$. Seterusnya, lukis garis lurus penyuaiian terbaik. [3 markah]

(c) Gunakan graf di (b) untuk mencari nilai

(i) y apabila $x = 0.38$, (Jwp : 0.5714)

(ii) n , (Jwp : 0.2597)

(iii) p , (Jwp : -1.428)

[6 markah]

[2011, No.7]

Jawapan : RUJUK GRAF

5). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = \frac{h}{kx} + \frac{1}{kx^2}$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar.

x	1	2	3	4	5	6
y	2.601	0.551	0.194	0.089	0.040	0.017

- (a) Berdasarkan jadual di atas, bina jadual untuk nilai-nilai x^2y . [1 markah]
- (b) Plot x^2y melawan x , menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 0.5 unit pada paksi- x^2y .
Seterusnya, lukis garis lurus penyuaiian terbaik. [3 markah]
- (c) Gunakan graf di (b) untuk mencari nilai
- (i) y apabila $x = 2.5$, (Jwp : 0.32)
- (ii) k , (Jwp : $\frac{1}{3}$)
- (iii) h , (Jwp : -0.1333)

[6 markah]
[2012, No.7]

Jawapan : RUJUK GRAF

6). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada suatu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $nx = py + xy$, dengan keadaan n dan p ialah pemalar.

x	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
y	2.020	0.770	0.465	0.385	0.351	0.339

- (a) Berdasarkan jadual di atas, bina satu jadual bagi nilai-nilai $\frac{1}{y}$ dan $\frac{1}{x}$. [2 markah]
- (b) Plot $\frac{1}{y}$ melawan $\frac{1}{x}$, menggunakan skala 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi- $\frac{1}{x}$ dan 2 cm kepada 0.5 unit pada paksi- $\frac{1}{y}$.
Seterusnya, lukis garis lurus penyuaiian terbaik. [3 markah]
- (c) Menggunakan graf di (b), cari nilai
- (i) n , (Jwp : 0.2632)
- (ii) p , (Jwp : -1.316)

[5 markah]
[2015, No.11]

Jawapan : RUJUK GRAF

7) Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada suatu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh $y - \sqrt{h} = \frac{hk}{x}$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar.

x	1.5	2.0	3.5	4.5	5.0	6.0
y	4.5	5.25	5.5	6.3	6.34	6.5

(a) Plot xy melawan x , menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 5 unit pada paksi- xy . Seterusnya, lukis garis lurus penyuaiian terbaik. [4 markah]

(b) Menggunakan graf di (a), cari

(i) nilai h dan nilai k , (Jwp : $h = 50 \frac{49}{64} / 50.766$, $k = -\frac{256}{3249} / -0.079$)

(ii) nilai y yang betul jika satu daripada nilai-nilai y telah tersalah catat semasa eksperimen. (Jwp : 6)

[6 markah]
[2017, No.9]

Jawapan : RUJUK GRAF

⇒ **bentuk 1b** ~ membentuk persamaan bagi garis lurus penyuaiian terbaik

8). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada suatu eksperimen. Satu garis lurus akan diperolehi apabila graf $\frac{y^2}{x}$ melawan $\frac{1}{x}$ diplotkan.

X	1.25	1.43	2.00	2.50	4.00	5.00
Y	4.47	4.38	4.18	3.87	2.83	2.24

(a) Berdasarkan jadual, bina satu jadual bagi nilai-nilai $\frac{1}{x}$ dan $\frac{y^2}{x}$. [2 markah]

(b) Plot graf $\frac{y^2}{x}$ melawan $\frac{1}{x}$, menggunakan skala 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi $-\frac{1}{x}$ dan 2 cm kepada 2 unit pada paksi $-\frac{y^2}{x}$.

Seterusnya, lukis garis lurus penyuaiian terbaik. [3 markah]

(c) Menggunakan graf di (b),

(i) cari nilai y apabila $x = 2.7$,

(Jwp : 3.747)

(ii) ungkapkan y dalam sebutan x .

(Jwp : $y = \sqrt{25 - 4x}$)

[5 markah]
[2018, No.11]

Jawapan : RUJUK GRAF

9) Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada suatu eksperimen.

X	1	1.2	1.4	1.6	1.8
Y	79	56	36.5	18.4	0.9

(a) Plot xy melawan x^3 , menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x^3 dan 2 cm kepada 10 unit pada paksi- xy .
Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik. [4 markah]

(b) Menggunakan graf di (a),

(i) tentukan persamaan linear yang menghubungkan x dan y , (Jwp : $xy = -15.89x^3 + 94.5$)

(ii) cari nilai x , apabila $y = \frac{50}{x}$. (Jwp : 1.409)

[6 markah]

[Ramalan]

Jawapan : RUJUK GRAF

⇒ bentuk 2 ~ MENGGUNAKAN HUKUM LOGARITMA

10). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu uji kaji. Diketahui x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = pk^{x^2}$, dengan keadaan p dan k adalah pemalar.

X	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Y	1.59	1.86	2.40	3.17	4.36	6.76

(a) Plot $\log y$ melawan x^2 , menggunakan skala 2 cm kepada 2 units pada paksi- x^2 dan 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi- $\log_{10} y$.

Seterusnya, lukis garis lurus penyuaian terbaik. [5 markah]

(b) Gunakan graf anda dari (a) untuk mencari nilai

(i) p , (Jwp : 1.259)

(ii) k . (Jwp : 1.109)

[5 markah]

[2003, No.7]

Jawapan : RUJUK GRAF

11). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperolehi daripada satu ujikaji. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = pk^x$, dengan keadaan p dan k adalah pemalar.

x	2	4	6	8	10	12
y	3.16	5.50	9.12	16.22	28.84	46.77

- (a) Plotkan $\log_{10} y$ melawan x , dengan menggunakan skala 2 cm kepada 2 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 0.2 unit pada paksi- $\log_{10} y$.

Seteruanya, lukiskan garis lurus penyuaian terbaik.

[4 markah]

- (b) Gunakan graf anda dari (a) untuk mencari nilai

(i) p ,

(Jwp : 1.820)

(ii) k .

(Jwp : 1.309)

[6 markah]

[2004, No.7]

Jawapan : RUJUK GRAF

12). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperolehi daripada satu ujikaji. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = pk^{x+1}$, dengan keadaan p dan k adalah pemalar.

x	1	2	3	4	5	6
y	4.0	5.7	8.7	13.2	20.0	28.8

- (a) Plot $\log y$ melawan $(x + 1)$, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- $(x + 1)$ dan 2 cm kepada 0.2 unit pada paksi- $\log_{10} y$.

Seterusnya, lukiskan garis lurus penyuaian terbaik.

[5 markah]

- (b) Gunakan graf anda dari (a) untuk mencari nilai.

(i) p ,

(Jwp : 1.778)

(ii) k .

(Jwp : 1.483)

[5 markah]

[2006, No.7]

Jawapan : RUJUK GRAF

13). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = hk^{2x}$, dengan h dan k ialah pemalar.

x	1.5	3.0	4.5	6.0	7.5	9.0
y	2.51	3.24	4.37	5.75	7.76	10.00

- (a) Berdasarkan jadual, bina satu jadual bagi nilai-nilai $\log_{10} y$. [1 markah]
- (b) Plot $\log_{10} y$ melawan x , menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi- $\log_{10} y$ -axis.
Seterusnya, lukis garis lurus penyuai terbaik. [4 markah]
- (c) Gunakan graf di (b) untuk mencari nilai
- (i) x apabila $y = 4.8$, (Jwp : 5)
 - (ii) h , (Jwp : 1.905)
 - (iii) k , (Jwp : 1.096)
- [5 markah]
[2008, No.8]

Jawapan : RUJUK GRAF

14). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = \frac{h^x}{k}$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar.

x	3	4	5	6	7	8
y	2.57	3.31	4.07	4.90	6.31	7.94

- (a) Plot $\log_{10} y$ melawan x , dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi- $\log_{10} y$.
Seterusnya, lukis garis lurus penyuai terbaik. [4 markah]
- (b) Gunakan graf di (a) untuk mencari nilai
- (i) h , (Jwp : 1.252)
 - (ii) k , (Jwp : 0.7586)
 - (iii) y apabila $x = 2.7$. (Jwp : 2.40)
- [6 markah]
[2010, No.7]

Jawapan : RUJUK GRAF

- 15). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada suatu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = \frac{h}{k^x}$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar.

x	4	6	8	10	12	14
y	2.82	2.05	1.58	1.23	0.89	0.66

- (a) Berdasarkan jadual di atas, bina satu jadual bagi nilai-nilai $\log_{10} y$. [1 markah]
- (b) Plot $\log_{10} y$ melawan x , menggunakan skala 2 cm kepada 2 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi- $\log_{10} y$.
Seterusnya, lukis garis lurus penyuuaian terbaik. [3 markah]
- (c) Menggunakan graf di (b), cari nilai
- (i) y apabila $x = 2$, (Jwp : 3.758)
 - (ii) h , (Jwp : 5.012)
 - (iii) k , (Jwp : 1.155)

[6 markah]
[2014, No.9]

Jawapan : RUJUK GRAF

- 16). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada suatu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = \frac{a}{b\sqrt{x}}$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar.

x	0.34	0.43	0.55	0.85	1.08	1.42
y	47.68	25.12	12.58	4.17	2.51	1.38

- (a) Berdasarkan jadual, bina satu jadual bagi nilai-nilai $\log_{10} x$ dan $\log_{10} y$. [2 markah]
- (b) Plot $\log_{10} y$ melawan $\log_{10} x$, menggunakan skala 2 cm kepada 0.1 unit pada paksi- X dan 2 cm kepada 0.2 unit pada paksi- Y .
Seterusnya, lukis garis lurus penyuuaian terbaik. [3 markah]
- (c) Menggunakan graf di (b), cari nilai
- (i) a , (Jwp : -3.020)
 - (ii) b . (Jwp : 0.400)

[5 markah]
[2019, No.11]

Jawapan : RUJUK GRAF

RAMALAN

⇒ **bentuk 1a** ~ aplikasi hukum linear kepada hubungan tak linear

1). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu ujikaji. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $\sqrt{y} = a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}}$, dengan keadaan a dan b adalah pemalar.

x	1	2	3	4	5
y	0.64	4.79	9.67	14.82	19.89

(a) Plot $\sqrt{xy}$ melawan x , dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada kedua-dua paksi.

Seteruanya, lukiskan garis lurus penyuai terbaik.

[4 markah]

(b) Gunakan graf di (a), cari

(i) nilai a dan b ,

(Jwp : $a = 2.3$, $b = -1.5$)

(ii) nilai y , apabila $x = 3.6$.

(Jwp : 12.66)

[6 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

2). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu ujikaji. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $4k^2x = (y - c)^2$, dengan keadaan k dan c adalah pemalar.

x	0	100	400	900	1600	2500
y	20	30	40	50	60	70

(a) Plot y melawan $\sqrt{x}$, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 10 unit pada kedua-dua paksi.

Seteruanya, lukiskan garis lurus penyuai terbaik.

[4 markah]

(b) Menggunakan graf di (a), cari

(i) nilai k dan c ,

(Jwp : $k = \frac{1}{2}$, $c = 20$)

(ii) nilai x , apabila $y = 55$,

(Jwp : 1225)

(iii) nilai y , apabila $x = 500$.

(Jwp : 42)

[6 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

3). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu ujikaji. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan linear $\frac{x+3}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$, dengan keadaan a dan b adalah pemalar.

x	1	2	3	4	5
y	1.31	1.39	1.47	1.55	1.62

(a) Plot satu graf linear untuk mewakili data tersebut.

[5 markah]

[*HINT* : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \sim$ persamaan garis lurus dalam bentuk pintasan]

(b) Gunakan graf di (a), cari

(i) nilai a dan b ,

(Jwp : $a = -3.5$, $b = 0.8$)

(ii) nilai sepadan bagi x , apabila $y = 1.5$.

(Jwp : 3.4)

[5 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

4). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu ujikaji. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y^2 = m(x^2 + 2x) + n$, dengan keadaan m dan n adalah pemalar.

x	1	2	3	4	5
y	2.18	2.65	3.24	3.84	4.53

(a) Plot y^2 melawan $(x + 1)^2$, menggunakan skala 2 cm kepada 4 unit pada paksi- $(x + 1)$ dan 2 cm kepada 2 units pada paksi- y^2 .

Seteruanya, lukiskan garis lurus penyuaian terbaik.

[5 markah]

(b) Menggunakan graf di (a), untuk mencari nilai

(i) m ,

(Ans : 0.4792 $\sim$ 0.4971)

(ii) n .

(Ans : 3.1971 $\sim$ 3.2792)

[5 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

5). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai sesaran, s meter dan masa, t saat bagi pergerakan suatu objek, yang diperoleh daripada suatu eksperimen. Diberi s dan t dihubungkan oleh persamaan $s = ut + \frac{1}{2}at^2$, dengan keadaan u ialah halaju awal dan a ialah pecutan objek itu. Sepasang daripada set data tersebut adalah tersalah rekod akibat kesilapan tertentu.

Masa, t saat	20	50	80	110	140	180
Sesaran, s meter	6	22.5	48	x	119	198

- (a) Plot graf $\frac{s}{t}$ melawan t , dengan menggunakan skala 2 cm kepada 40 unit pada paksi- t dan 2 cm kepada 0.2 unit pada paksi- $\frac{s}{t}$.

Seteruanya, lukiskan garis lurus penyuuaian terbaik.

[4 markah]

- (b) Tandakan $\otimes$ pada graf anda untuk mewakili titik sebenar bagi data yang tersalah rekod [1 markah] itu.

- (c) Gunakan graf di (a) untuk mencari nilai

(i) halaju awal,

(Jwp : 0.2)

(ii) pecutan,

(Jwp : 0.01)

(iii) x .

(Jwp : 82.5)

[5 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

6). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Masa ayunan, bagi sebuah bandul ringkas yang panjangnya, L , diketahui memenuhi hubungan tak linear $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ dengan g sebagai pemalar. Jadual menunjukkan nilai-nilai sepadan bagi L dan T yang diperolehi daripada suatu eksperimen.

L	20	40	60	80	100
T	0.95	1.28	1.58	1.81	2.04

- (a) Plot T^2 melawan L , dengan menggunakan skala 2 cm kepada 20 unit pada paksi- L dan 2 cm kepada 1 unit pada paksi- T^2 .

Seteruanya, lukiskan garis lurus penyuuaian terbaik.

[4 markah]

- (b) Gunakan graf di (a), cari

(i) nilai g ,

(Jwp : 947.7 ~ 995.7)

(ii) nilai T , apabila $L = 50\text{cm}$,

(Jwp : 1.449)

(iii) nilai L , apabila $T = 1.79\text{s}$.

(Jwp : 77 ~ 78)

[6 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

7). Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Beberapa beban dengan jisim m kg digantung pada hujung suatu spring dan diayunkan secara mencancang. Kadar ayunan, f ayunan sesaat, untuk setiap beban ditentukan. Jadual menunjukkan keputusan bagi eksperimen

Jisim beban, m kg	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08
Kadar ayunan, f ayunan sesaat	20	14	10	8	7

Diketahui bahawa kadar ayunan, f ayunan sesaat, dan jisim beban, m kg, dikaitkan oleh persamaan $f^2 km = 1$, dengan keadaan k adalah pemalar.

(a) Plot f^2 melawan $\frac{1}{m}$, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 20 units pada paksi- $\frac{1}{m}$ dan 2 cm kepada 50 units pada paksi- f^2 . Seteruannya, lukiskan garis lurus penyuaian terbaik. [4 markah]

(b) Gunakan graf di (a), cari

(i) kadar ayunan yang dibuat oleh beban yang berjisim 0.05kg, (Jwp : 8.944)

(ii) jisim beban yang membuat 15 ayunan sesaat, (Jwp : 18)
(Berikan jawapan anda betul kepada gram yang terdekat)

(iii) nilai k . (Jwp : 0.2558)

[5 markah]

(c) Apabila spring itu digantikan dengan spring lain, didapati bahawa hubungan antara f dengan m menjadi $f^2 = \frac{1}{2m}$. Lukis graf yang terbentuk pada paksi yang sama. [1 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

⇒ **bentuk 2a** ~ aplikasi hukum linear kepada hubungan tak linear

8) Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada satu ujikaji. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = ab^{-x}$, dengan keadaan a dan b adalah pemalar.

x	1	2	3	4	5	6
y	41.7	34.7	28.9	27.5	20.1	16.7

(a) Plot $\log_{10} y$ melawan x , dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 0.2 unit pada paksi- $\log_{10} y$. Seteruannya, lukiskan garis lurus penyuaian terbaik. [4 markah]

(b) Gunakan graf di (a), cari

(i) dan tanda $\otimes$ pada graf untuk mewakili titik sebenar bagi data yang tersalah rekod, dan seterusnya anggarkan satu nilai yang lebih tepat bagi data itu, (Jwp : 23.99)

(ii) nilai a dan b , (Jwp : $a = 50.12$, $b = 1.202$)

(iii) nilai y apabila $x = 3.5$. (Jwp : 26.3)
[6 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

9) Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada suatu ujikaji. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = pq^{x-1}$, dengan keadaan p dan q adalah pemalar.

x	3	4	5	6	7	8
y	12.1	6.46	3.47	1.89	0.95	0.53

- (a) Plot $\log_{10} y$ melawan $(x - 1)$, dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- $(x - 1)$ dan 2 cm kepada 0.2 unit pada paksi- $\log_{10} y$.

Seteruanya, lukiskan garis lurus penyuaiian terbaik.

[4 markah]

- (b) Gunakan graf di (a) untuk mencari nilai

(i) p dan q ,

(Jwp : $p = 42.66$, $q = 0.5346$)

(ii) x apabila $y = 5.0$.

(Jwp : 4.4)

[6 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

10) Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y , yang diperoleh daripada suatu eksperimen. Pemboleh ubah x dan y dihubungkan oleh persamaan $y = (1 + k)x^{\frac{c}{2}}$, dengan keadaan k dan c adalah pemalar.

x	3.2	6.3	10	30	50	80	100
y	17.8	25	31.6	54.7	70.1	89.4	100

- (a) Ungkapkan persamaan tak linear kepada bentuk linear.

[2 markah]

- (b) Plot satu linear graf untuk mewakili data tersebut.

[4 markah]

- (c) Menggunakan graf di (a), cari nilai

(i) k ,

(Jwp : $k = 9$)

(ii) c .

(Jwp : 1)

[4 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

11) Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Pada masa $t = 0$, satu koloni bakteria mempunyai 1000 bakteria. Populasi bagi koloni bakteria, y pada masa t jam diberi oleh $y = y_0 e^{nt}$. Populasi bagi koloni bakteria pada masa t yang telah direkod adalah seperti yang ditunjukkan pada jadual.

t	0.5	1	1.5	2	2.5
y	2718	7389	20086	54598	148410

- (a) Tunjukkan bahawa $y_0 = 1000$. [1 markah]
- (b) Plot $\log_{10} y$ melawan t , dengan menggunakan skala 2 cm kepada 0.5 unit pada kedua-dua paksi. Seteruanya, lukiskan garis lurus penyuaiian terbaik. [4 markah]
- (c) Gunakan graf di (b), cari [Guna $\log_{10} e = 0.4343$]
- (i) nilai n , (Jwp : 1.996)
- (ii) masa minimum yang perlu diambil bagi populasi bakteria melebihi 100000. (Jwp : 2.3) [5 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF

12) Gunakan kertas graf untuk menjawab soalan ini.

Jadual menunjukkan data yang diperolehi Lea dan Rowena dalam satu ujikaji Kimia. Data itu menunjukkan hubungan antara kadar tindak balas suatu bahan kimia $X \text{ mol s}^{-1}$ dengan suhu $T^\circ \text{C}$.

Kadar tindakbalas kimia, $X \text{ mol s}^{-1}$	0.5	2.2	4.0	5.9	7.8
Suhu, $T^\circ \text{C}$	-7.5	-4.4	3.21	21.4	68.2

Diketahui bahawa suhunya T dan tindakbalas X adalah dihubungkan oleh persamaan $T + 10 = Ab^X$, dengan keadaan A dan b adalah pemalar.

- (a) Tuliskan $T + 10 = Ab^X$ dalam bentuk persamaan linear. [Jwp : $\log_{10}(T + 10) = \log_{10} A + (\log_{10} b)X$] [1 markah]
- (b) Plot $\log_{10}(T + 10)$ melawan X , dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- X dan 2 cm kepada 0.2 unit pada paksi- $\log_{10}(T + 10)$. Seteruanya, lukiskan garis lurus penyuaiian terbaik. [4 markah]
- (c) Menggunakan graf di (b), cari
- (i) nilai A dan nilai b , (Jwp : $A = 2.0895$, $b = 1.585$)
- (ii) nilai X apabila $T = 0^\circ \text{C}$. (Jwp : 3.45) [5 markah]

Jawapan : RUJUK GRAF



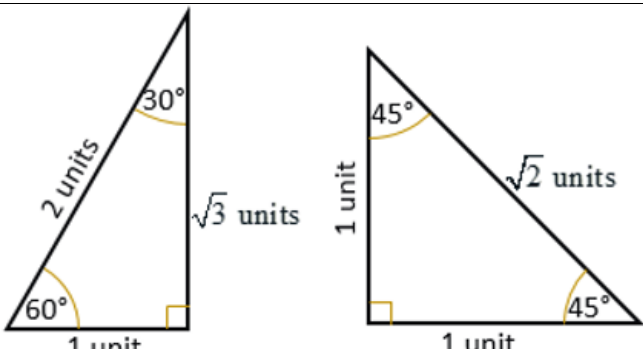
MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

10. FUNGSI TRIGONOMETRI



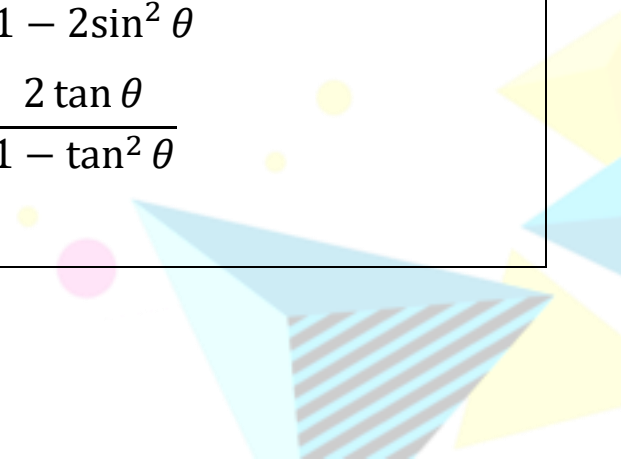
NOTA

Nisbah Trigonometri	Sudut Khas																								
$\sin \theta = \frac{\text{opposite } (o)}{\text{hypotenuse } (h)}$ $\cos \theta = \frac{\text{adjacent } (a)}{\text{hypotenuse } (h)}$ $\tan \theta = \frac{\text{opposite } (o)}{\text{adjacent } (a)} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\operatorname{kosek} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ $\operatorname{sek} \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ $\tan \theta = \frac{1}{\operatorname{kot} \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	 <table><tr><th>Sudut (dalam darjah/ radian)</th><th>0°/0</th><th>30°/π/6</th><th>45°/π/4</th><th>60°/π/3</th><th>90°/π/2</th></tr><tr><td>sin</td><td>0</td><td>1/2</td><td>1/√2</td><td>√3/2</td><td>1</td></tr><tr><td>kos</td><td>1</td><td>√3/2</td><td>1/√2</td><td>1/2</td><td>0</td></tr><tr><td>tan</td><td>0</td><td>1/√3</td><td>1</td><td>√3</td><td>Not defined</td></tr></table>	Sudut (dalam darjah/ radian)	0°/0	30°/π/6	45°/π/4	60°/π/3	90°/π/2	sin	0	1/2	1/√2	√3/2	1	kos	1	√3/2	1/√2	1/2	0	tan	0	1/√3	1	√3	Not defined
Sudut (dalam darjah/ radian)	0°/0	30°/π/6	45°/π/4	60°/π/3	90°/π/2																				
sin	0	1/2	1/√2	√3/2	1																				
kos	1	√3/2	1/√2	1/2	0																				
tan	0	1/√3	1	√3	Not defined																				

Sukuan dan Sudut Sukuan	
Sukuan II ~ Sudut Cakah (90° < θ < 180°) S sin θ +ve cos θ -ve tan θ -ve	Sukuan I ~ Sudut Tirus (0° < θ < 90°) A sin θ +ve cos θ +ve tan θ +ve
Sukuan III ~ Sudut Reflek (180° < θ < 270°) T sin θ -ve cos θ -ve tan θ +ve	Sukuan IV ~ Sudut Reflek (270° < θ < 360°) C sin θ -ve cos θ +ve tan θ -ve



Identiti Trigonometri	
Identiti Sudut Bertentangan	Identiti Cofuntion
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$ $\tan \theta = \cot(90^\circ - \theta)$ $\operatorname{cosec} \theta = \sec(90^\circ - \theta)$ $\sec \theta = \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$ $\cot \theta = \tan(90^\circ - \theta)$
Identiti Asas	Identiti Sudut Majmuk
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$	$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
Identiti Sudut Berganda	Identiti Sudut Separuh
$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\quad = 2\cos^2 \theta - 1$ $\quad = 1 - 2\sin^2 \theta$ $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\quad = 2\cos^2 \theta - 1$ $\quad = 1 - 2\sin^2 \theta$ $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$



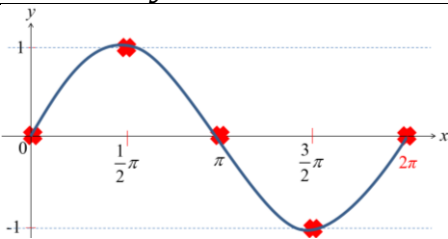
Graf Fungsi Trigonometri

$$f(x) = a \text{ TRI } (px) + q$$

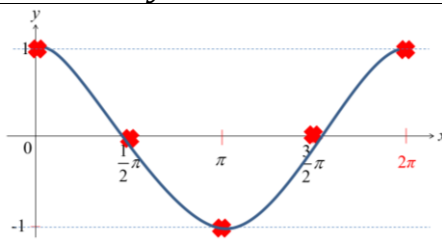
- 1) TRI $\rightarrow$ graf sin/kos/tan
- 2) $p \rightarrow$ kitar (label 2π or 360° di belakang)
- 3) $a \rightarrow$ amplitud (nilai maksimum & minimum)
- 4) $q \rightarrow$ bergerak ke atas/bawah secara menegak
- 5) Tanda negatif $\rightarrow$ seluruh graf terbalik
- 6) Modulus $\rightarrow$ bahagian negative graf bertukar kepada bahagian positive
- 7) Julat $\rightarrow$ padamkan bahagian yang tidak diperlukan

Basik

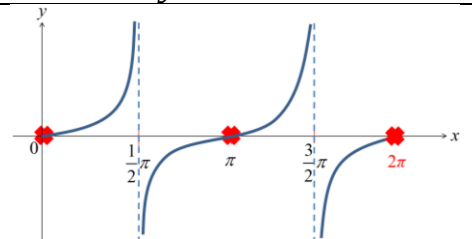
$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$

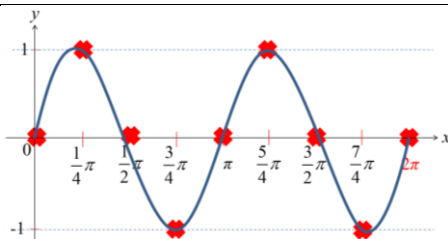


$$y = \tan x$$

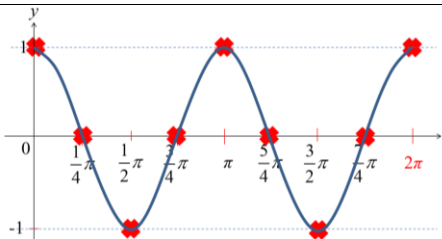


Kitar

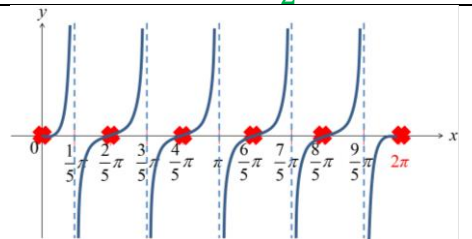
$$y = \sin 2x$$



$$y = \cos 2x$$

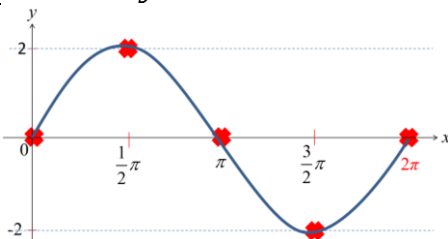


$$y = \tan \frac{5}{2}x$$

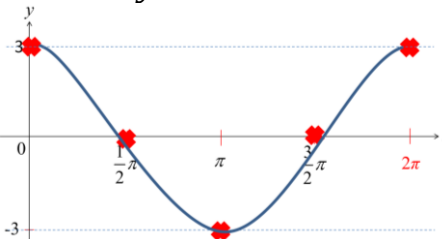


Amplitud

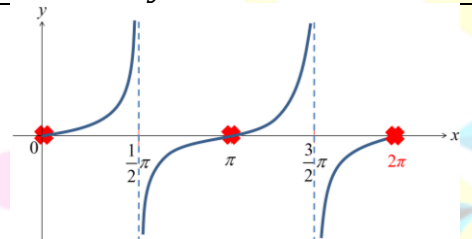
$$y = 2\sin x$$



$$y = 3\cos x$$



$$y = 4\tan x$$

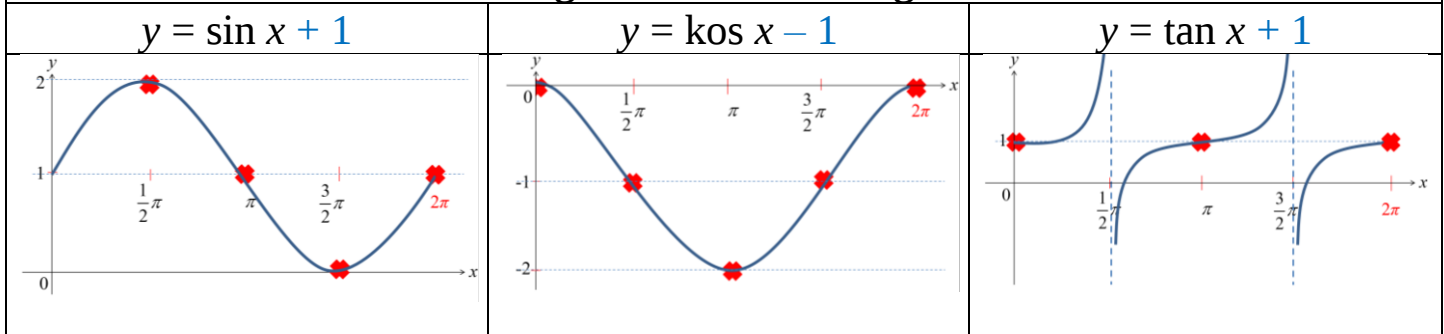


Graf Fungsi Trigonometri

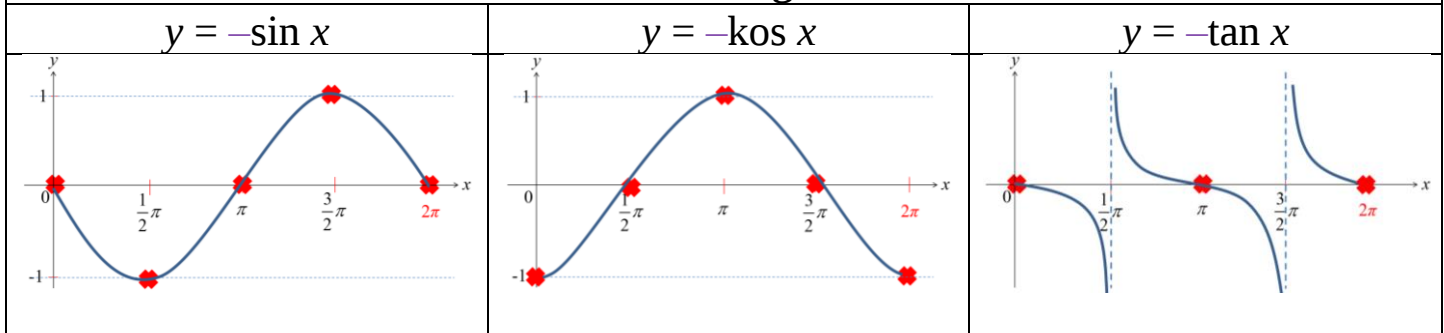
$$f(x) = a \text{ TRI } (px) + q$$

- 1) TRI $\rightarrow$ graf sin/kos/tan
- 2) $p \rightarrow$ kitar (label 2π or 360° di belakang)
- 3) $a \rightarrow$ amplitud (nilai maksimum & minimum)
- 4) $q \rightarrow$ bergerak ke atas/bawah secara menegak
- 5) Tanda negatif $\rightarrow$ seluruh graf terbalik
- 6) Modulus $\rightarrow$ bahagian negative graf bertukar kepada bahagian positive
- 7) Julat $\rightarrow$ padamkan bahagian yang tidak diperlukan

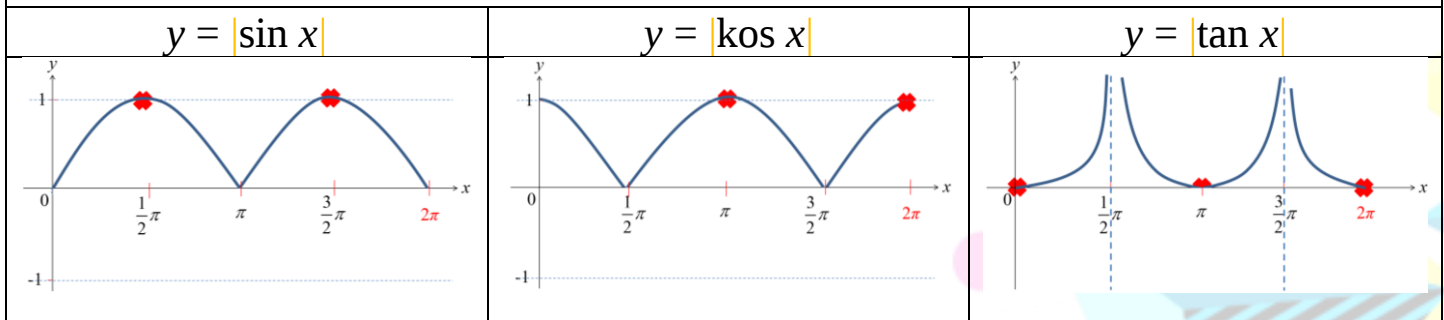
Bergerak secara menegak



Tanda Negatif



Modulus



CONTOH

1. Selesaikan $\sin x = \frac{1}{2}$, untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">S</td> <td style="text-align: center;">A</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">150°</td> <td style="text-align: center;">30°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">210°</td> <td style="text-align: center;">330°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">T</td> <td style="text-align: center;">C</td> </tr> </table> $x = 30^\circ, 150^\circ$	S	A	150°	30°	210°	330°	T	C	2. Selesaikan $\sin x = -\frac{1}{2}$, untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">S</td> <td style="text-align: center;">A</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">150°</td> <td style="text-align: center;">30°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">210°</td> <td style="text-align: center;">330°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">T</td> <td style="text-align: center;">C</td> </tr> </table> $x = 210^\circ, 330^\circ$	S	A	150°	30°	210°	330°	T	C
S	A																
150°	30°																
210°	330°																
T	C																
S	A																
150°	30°																
210°	330°																
T	C																
3. Selesaikan $\sin x = 0$, untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">S</td> <td style="text-align: center;">A</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">180°</td> <td style="text-align: center;">0°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">180°</td> <td style="text-align: center;">360°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">T</td> <td style="text-align: center;">C</td> </tr> </table> $x = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$	S	A	180°	0°	180°	360°	T	C	4. Selesaikan $\sin x = \frac{1}{2}$, untuk $0^\circ \leq x \leq 720^\circ$. <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">S</td> <td style="text-align: center;">A</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">150° 510°</td> <td style="text-align: center;">30° 390°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">210° 570°</td> <td style="text-align: center;">330° 690°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">T</td> <td style="text-align: center;">C</td> </tr> </table> $x = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ$	S	A	150° 510°	30° 390°	210° 570°	330° 690°	T	C
S	A																
180°	0°																
180°	360°																
T	C																
S	A																
150° 510°	30° 390°																
210° 570°	330° 690°																
T	C																
5. Selesaikan $\sin 2x = \frac{1}{2}$, untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ $0^\circ \leq 2x \leq 720^\circ$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">S</td> <td style="text-align: center;">A</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">150° 510°</td> <td style="text-align: center;">30° 390°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">210° 570°</td> <td style="text-align: center;">330° 690°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">T</td> <td style="text-align: center;">C</td> </tr> </table> $2x = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ$ $x = 15^\circ, 75^\circ, 195^\circ, 255^\circ$	S	A	150° 510°	30° 390°	210° 570°	330° 690°	T	C	6. Selesaikan $\sin x = \frac{1}{2}$, untuk $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">S</td> <td style="text-align: center;">A</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-210° 150°</td> <td style="text-align: center;">-330° 30°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-150° 210°</td> <td style="text-align: center;">-30° 330°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">T</td> <td style="text-align: center;">C</td> </tr> </table> $x = -330^\circ, -210^\circ, 30^\circ, 150^\circ$	S	A	-210° 150°	-330° 30°	-150° 210°	-30° 330°	T	C
S	A																
150° 510°	30° 390°																
210° 570°	330° 690°																
T	C																
S	A																
-210° 150°	-330° 30°																
-150° 210°	-30° 330°																
T	C																
7. Selesaikan $\cos \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$, untuk $0^\circ \leq x \leq 900^\circ$. $0^\circ \leq \frac{1}{2}x \leq 450^\circ$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">S</td> <td style="text-align: center;">A</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">150° 510°</td> <td style="text-align: center;">30° 390°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">210° 570°</td> <td style="text-align: center;">330° 690°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">T</td> <td style="text-align: center;">C</td> </tr> </table> $\frac{1}{2}x = 30^\circ, 330^\circ, 390^\circ$ $x = 60^\circ, 660^\circ, 780^\circ$	S	A	150° 510°	30° 390°	210° 570°	330° 690°	T	C	8. Selesaikan $\tan \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}$, untuk $-180^\circ \leq x \leq 450^\circ$. $-270^\circ \leq \frac{3}{2}x \leq 675^\circ$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">S</td> <td style="text-align: center;">A</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-206.57° 153.43° 513.43°</td> <td style="text-align: center;">-333.43° 26.57° 386.57°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-153.43° 206.57° 566.57°</td> <td style="text-align: center;">-26.57° 333.43° 693.43°</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">T</td> <td style="text-align: center;">C</td> </tr> </table> $\frac{3}{2}x = -206.57^\circ, -26.57^\circ, 153.43^\circ, 333.43^\circ, 513.43^\circ$ $x = -137.71^\circ, -17.71^\circ, 102.29^\circ, 222.29^\circ, 342.29^\circ$	S	A	-206.57° 153.43° 513.43°	-333.43° 26.57° 386.57°	-153.43° 206.57° 566.57°	-26.57° 333.43° 693.43°	T	C
S	A																
150° 510°	30° 390°																
210° 570°	330° 690°																
T	C																
S	A																
-206.57° 153.43° 513.43°	-333.43° 26.57° 386.57°																
-153.43° 206.57° 566.57°	-26.57° 333.43° 693.43°																
T	C																

9. Selesaikan $3 \cos^2 x - 10 \sin x + 5 = 0$, untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. $3 \cos^2 x - 10 \sin x + 5 = 0$ $3(1 - \sin^2 x) - 10 \sin x + 5 = 0$ $3 \sin^2 x + 10 \sin x - 8 = 0$ $(3 \sin x - 2)(\sin x + 4) = 0$ $\sin x = \frac{2}{3}, \sin x = -4$ (ditolak) $x = 41.81^\circ, 138.19^\circ$	10. Selesaikan $3 \cos 2x = 8 \sin x - 5$, untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. $3 \cos 2x = 8 \sin x - 5$ $3(1 - 2 \sin^2 x) = 8 \sin x - 5$ $3 \sin^2 x + 4 \sin x + 4 = 0$ $(3 \sin x - 2)(\sin x + 2) = 0$ $\sin x = \frac{2}{3}, \sin x = -2$ (ditolak) $x = 41.81^\circ, 138.19^\circ$																				
11. Selesaikan $\cot x + 2 \cos x = 0$, untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. $\cot x + 2 \cos x = 0$ $\frac{\cos x}{\sin x} + 2 \cos x = 0$ $\cos x + 2 \cos x \sin x = 0$ $\cos x (1 + 2 \sin x) = 0$ $\cos x = 0, \sin x = -\frac{1}{2}$ $x = 90^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ$	12. SPM 2016 Kertas 1 Soalan 20: <i>Selesaikan persamaan $\tan \alpha = 4 - 3 \cot \alpha$ untuk $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. [3 markah]</i> $\tan \alpha = 4 - 3 \left(\frac{1}{\tan \alpha} \right)$ $(\tan \alpha)^2 = 4 \tan \alpha - 3$ $(\tan \alpha)^2 - 4 \tan \alpha + 3 = 0$ $(\tan \alpha - 1)(\tan \alpha - 3) = 0$ $\tan \alpha = 1, \tan \alpha = 3$ $\alpha = 45^\circ, 71.57^\circ$																				
13. SPM 2014 Kertas 1 Soalan 14: Solve the equation $\sin 2x + \cos x = 0$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. [4 marks] <i>Selesaikan persamaan $\sin 2x + \cos x = 0$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. [4 markah]</i> $2 \sin x \cos x + \cos x = 0$ $\cos x (2 \sin x + 1) = 0$ $\cos x = 0, \sin x = -\frac{1}{2}$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; text-align: center;"><tr><td>S</td><td>A</td><td>S</td><td>A</td></tr><tr><td>90°</td><td>90°</td><td>150°</td><td>30°</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td>270°</td><td>270°</td><td>210°</td><td>330°</td></tr><tr><td>T</td><td>C</td><td>T</td><td>C</td></tr></table> $x = 90^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ$	S	A	S	A	90°	90°	150°	30°					270°	270°	210°	330°	T	C	T	C	14. SPM 2013 Kertas 2 Soalan 4(b): <i>Seterusnya, selesaikan persamaan $\tan x \sin 2x = \frac{1}{4}$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. [4 markah]</i> $\tan x \sin 2x = \frac{1}{4}$ $\tan x (2 \sin x \cos x) = \frac{1}{4}$ $\left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (2 \sin x \cos x) = \frac{1}{4}$ $2 \sin^2 x = \frac{1}{4}$ $1 - \cos 2x = \frac{1}{4}$ $\cos 2x = \frac{3}{4}$ $2x = 41.41^\circ, 318.59^\circ, 401.41^\circ, 678.59^\circ$ $x = 20.71^\circ, 159.30^\circ, 200.71^\circ, 339.30^\circ$ $0^\circ \leq 2x \leq 720^\circ$
S	A	S	A																		
90°	90°	150°	30°																		
270°	270°	210°	330°																		
T	C	T	C																		
15. SPM 2015 Kertas 2 Soalan 7(a)(ii): <i>Seterusnya, selesaikan persamaan $0^\circ \leq 2x \leq 720^\circ$ [4 markah]</i> $2 \cos (x + 45^\circ) \cos (x - 45^\circ) = \frac{1}{2}$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. [4 markah] $2 \cos (x + 45^\circ) \cos (x - 45^\circ)$ $= 2(\cos x \cos 45^\circ - \sin x \sin 45^\circ)(\cos x \cos 45^\circ + \sin x \sin 45^\circ)$ $= 2(\cos^2 x \cos^2 45^\circ - \sin^2 x \sin^2 45^\circ)$ $= 2(\cos^2 x (0.5) - \sin^2 x (0.5))$ $= 2(0.5)(\cos^2 x - \sin^2 x)$ $= \cos^2 x - \sin^2 x$ $= \cos 2x$ $\cos 2x = \frac{1}{2}$ $2x = 60^\circ, 300^\circ, 420^\circ, 660^\circ$ $x = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$	16. Selesaikan $2 \cos 4x + \cos 2x - 1 = 0$, untuk $0^\circ \leq x \leq 270^\circ$. $0^\circ \leq \theta \leq 540^\circ$ Andaikan $2x = \theta$, $2 \cos 2\theta + \cos \theta - 1 = 0$ $2(2 \cos^2 \theta - 1) + \cos \theta - 1 = 0$ $4 \cos^2 \theta + \cos \theta - 3 = 0$ $(4 \cos \theta - 3)(\cos \theta + 1) = 0$ $\cos \theta = \frac{3}{4}, \cos \theta = -1$ $\theta = 41.41^\circ, 180^\circ, 318.59^\circ, 401.41^\circ, 540^\circ$ $x = 20.705^\circ, 90^\circ, 159.295^\circ, 200.705^\circ, 270^\circ$																				

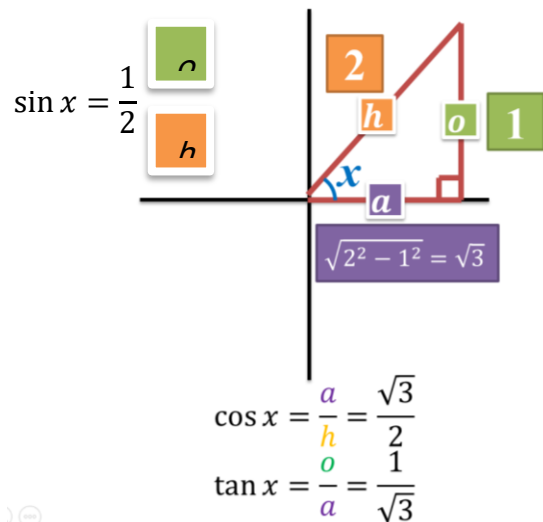
Kaedah 1:

S	A
150°	30°
210°	330°
T	C

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ or } 0.8660$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ or } 0.57735$$

Kaedah 2:

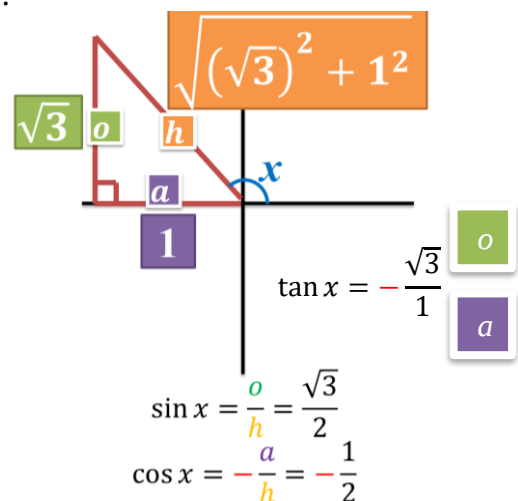


Kaedah 1:

S	A
120°	60°
240°	300°
T	C

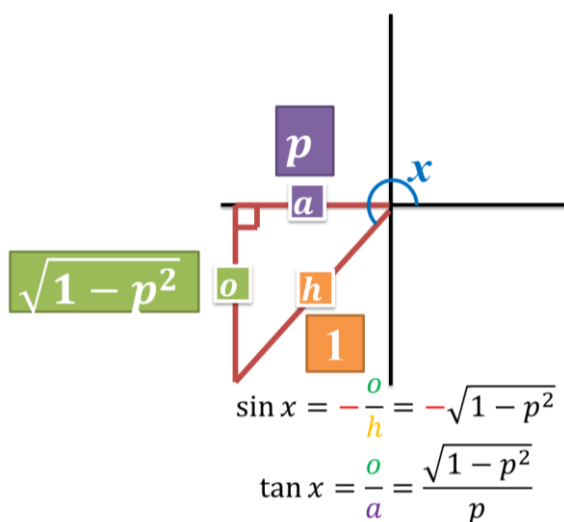
$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ or 0.8660
 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ or -0.5

Kaedah 2:



19. Diberi $\cos x = -p$, untuk $180^\circ \leq x \leq 270^\circ$. Cari $\sin x$ dan $\tan x$, dalam sebutan p .

$$\cos x = -\frac{p}{1}$$



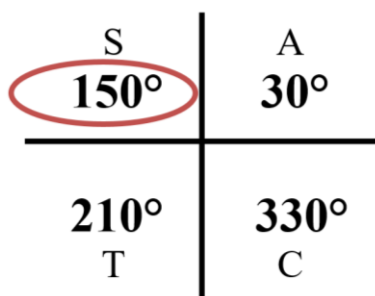
20. Diberi $\sin \theta = \frac{1}{2}$, dan $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Cari: (a) $\tan \theta$, (b) $\sin 2\theta$, (c) $\sin \frac{1}{2}\theta$.

Kaedah 1:

$$(a) \tan 150^\circ = -0.57735$$

$$(b) \sin(2(150^\circ)) = \sin 300^\circ = -0.8660$$

$$(c) \sin \frac{1}{2}(150^\circ) = \sin 75^\circ = 0.9659$$



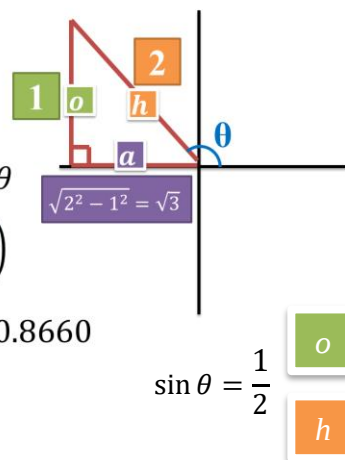
Kaedah 2:

$$(a) \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ or } -0.57735$$

$$(b) \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ or } -0.8660$$

$$(c) \cos \theta = 1 - 2\sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = 0.9659$$

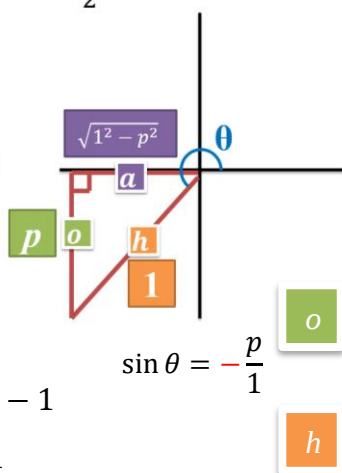


21. Diberi $\sin \theta = -p$, dan $180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$. Cari dalam sebutan p : (a) $\tan \theta$, (b) $\cos 2\theta$, (c) $\cos \frac{1}{2}\theta$.

$$(a) \tan \theta = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$(b) \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2(-p)^2 = 1 - 2p^2$$

$$(c) \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \Rightarrow \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\cos^2 \theta - 1}{2} - 1 \Rightarrow \cos \theta = 2\cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos \frac{1}{2}\theta = -\sqrt{\frac{\cos \theta + 1}{2}} = -\sqrt{\frac{-\sqrt{1-p^2} + 1}{2}}$$



22. SPM 2013 Kertas 1 Soalan 18:

Given $\cos \theta = k$, where k is a constant and $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

Diberi $\cos \theta = k$, dengan keadaan k ialah pemalar dan $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

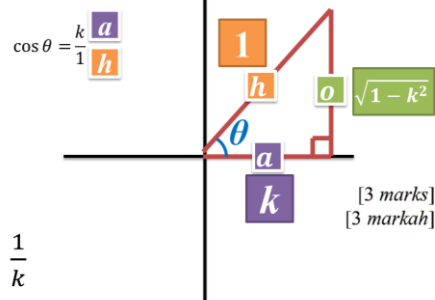
Find in terms of k

Cari dalam sebutan k

(a) $\sec \theta$,
 $\sec \theta$,

(b) $\sin 2\theta$.

$$(a) \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{k} \quad (b) \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{1}\right) \left(\frac{k}{1}\right) = 2k\sqrt{1-k^2}$$



[3 marks]
[3 markah]

23. SPM 2018 Kertas 1 Soalan 11(a)

(a) Given $\cos \theta = h$, state $\cos(180^\circ - \theta)$ in terms of h . [1 mark]

Diberi $\cos \theta = h$, nyatakan $\cos(180^\circ - \theta)$ dalam sebutan h . [1 markah]

$$\cos \theta = \frac{h}{1}$$



$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \theta) &= \cos 180^\circ \cos \theta - \sin 180^\circ \sin \theta \\ &= (-1)(h) - (0)(\sqrt{1-h^2}) \\ &= -h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A - B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B\end{aligned}$$

24. SPM 2017 Kertas 1 Soalan 15

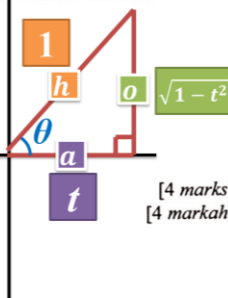
It is given that $\cos \alpha = t$ where t is a constant and $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Diberi bahawa $\cos \alpha = t$ dengan keadaan t ialah pemalar dan $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Express in terms of t

Ungkapkan dalam sebutan t

$$\cos \alpha = \frac{t}{1}$$



(a) $\sin(180^\circ + \alpha)$,

(b) $\sec 2\alpha$.

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ + \alpha) &= \sin 180^\circ \cos \alpha + \cos 180^\circ \sin \alpha \\ &= (0)(t) + (-1)(\sqrt{1-t^2}) \\ &= -\sqrt{1-t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sec 2\alpha &= \frac{1}{\cos 2\alpha} \\ &= \frac{1}{2\cos^2 \alpha - 1} \\ &= \frac{1}{2t^2 - 1}\end{aligned}$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

25. SPM 2015 Kertas 1 Soalan 13:

Diberi $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ dan $0^\circ < \theta < 180^\circ$, cari nilai $\tan(\theta + 45^\circ)$. [3 markah]

Kaedah 1:

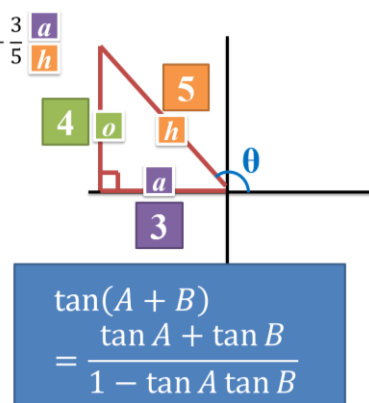
$$\theta = 126.87^\circ$$

$$\begin{aligned}\tan(126.87^\circ + 45^\circ) &= \tan 171.87^\circ \\ &= -0.1429\end{aligned}$$

S	A
126.87°	53.13°
233.13°	306.87°
T	C

Kaedah 2:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= -\frac{4}{3} \quad \cos \theta = -\frac{3}{5} \\ \tan(\theta + 45^\circ) &= \frac{\tan \theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan \theta \tan 45^\circ} \\ &= \frac{-\frac{4}{3} + 1}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)(1)} \\ &= -\frac{1}{7} \text{ or } -0.1429\end{aligned}$$



26. Diberi $\sin A = \frac{5}{13}$ dan $\cos B = \frac{4}{5}$, dengan keadaan A ialah sudut cakah dan B ialah sudut tirus.

Cari: (a) $\tan A$, (b) $\cos(A - B)$

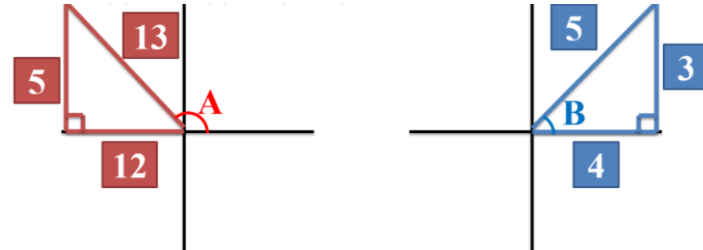
Kaedah 1:

S	A	S	A
157.38°	22.62°	143.13°	36.87°
202.62°	337.38°	216.87°	323.13°
T	C	T	C

(a) $\tan A = \tan 157.38^\circ = -0.4167$

$$\begin{aligned}\cos(A - B) &= \cos(157.38^\circ - 36.87^\circ) \\ &= \cos(120.51^\circ) \\ &= -0.5077\end{aligned}$$

Kaedah 2:



(a) $\tan A = -\frac{5}{12}$ or -0.4167

$$\begin{aligned}\cos(A - B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ &= \left(-\frac{12}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= -\frac{33}{65} \text{ or } -0.5077\end{aligned}$$

27. SPM 2013 Kertas 2 Soalan 4:

(a) Prove that $\tan x \sin 2x = 1 - \cos 2x$.

[2 marks]

Buktikan bahawa $\tan x \sin 2x = 1 - \cos 2x$.

[2 markah]

(a) $\tan x \sin 2x$

$$= \tan x (2 \sin x \cos x)$$

$$= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (2 \sin x \cos x)$$

$$= 2 \sin^2 x$$

$$= 1 - \cos 2x$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

28. SPM 2015 Kertas 2 Soalan 7(a):

(a) (i) Prove that

$$2 \cos (x + 45^\circ) \cos (x - 45^\circ) = \cos 2x.$$

[3 marks]

Buktikan bahawa

$$2 \cos (x + 45^\circ) \cos (x - 45^\circ) = \cos 2x.$$

[3 markah]

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$2 \cos(x + 45^\circ) \cos(x - 45^\circ)$$

$$= 2(\cos x \cos 45^\circ - \sin x \sin 45^\circ)(\cos x \cos 45^\circ + \sin x \sin 45^\circ)$$

$$= 2(\cos^2 x \cos^2 45^\circ - \sin^2 x \sin^2 45^\circ)$$

$$= 2(\cos^2 x (0.5) - \sin^2 x (0.5))$$

$$= 2(0.5)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos 2x$$

29. SPM 2019 Kertas 2 Soalan 10(a)(i):

(a) (i) Prove that $\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$.

Buktikan bahawa $\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$.

$$\frac{1 - \cos A}{\sin A}$$

$$= \frac{1 - (1 - 2 \sin^2(\frac{A}{2}))}{2 \sin(\frac{A}{2}) \cos(\frac{A}{2})}$$

$$= \frac{2 \sin^2(\frac{A}{2})}{2 \sin(\frac{A}{2}) \cos(\frac{A}{2})}$$

$$= \frac{\sin(\frac{A}{2})}{\cos(\frac{A}{2})}$$

$$= \tan(\frac{A}{2})$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos A = 1 - 2 \sin^2(\frac{A}{2})$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin A = 2 \sin(\frac{A}{2}) \cos(\frac{A}{2})$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

30. Buktikan bahawa $\tan \frac{x}{4} (1 + \cos \frac{x}{2}) = \sin \frac{x}{2}$.

Let $x = 4\theta$

$$\tan \frac{x}{4} (1 + \cos \frac{x}{2})$$

$$= \tan \frac{4\theta}{4} (1 + \cos \frac{4\theta}{2})$$

$$= \tan \theta (1 + \cos 2\theta)$$

$$= \tan \theta (1 + 2 \cos^2 \theta - 1)$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (2 \cos^2 \theta)$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= \sin 2\theta$$

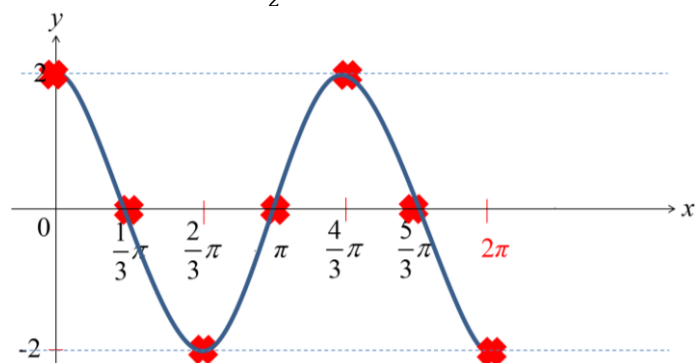
$$= \sin \frac{x}{2}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

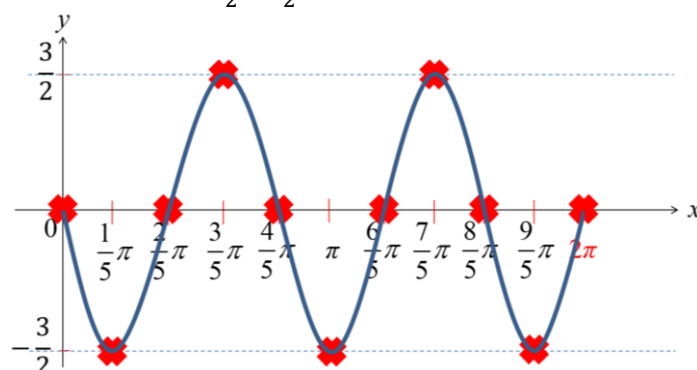
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

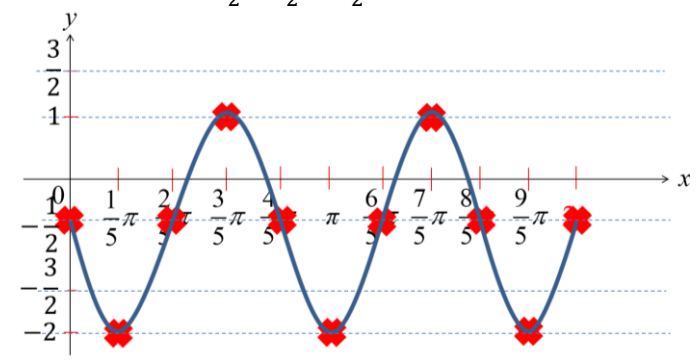
31. Lakar $y = 2\cos \frac{3}{2}x$.



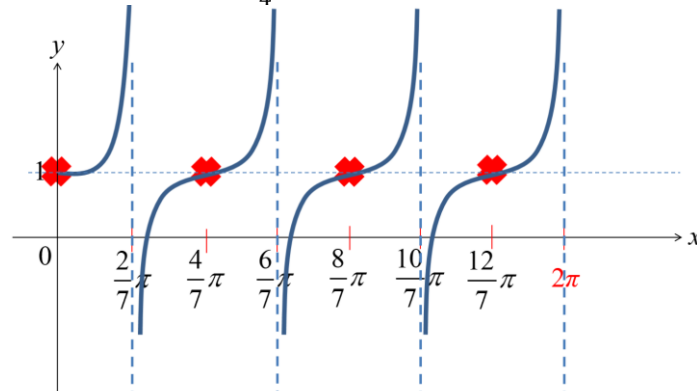
32. Lakar $y = -\frac{3}{2}\sin \frac{5}{2}x$.



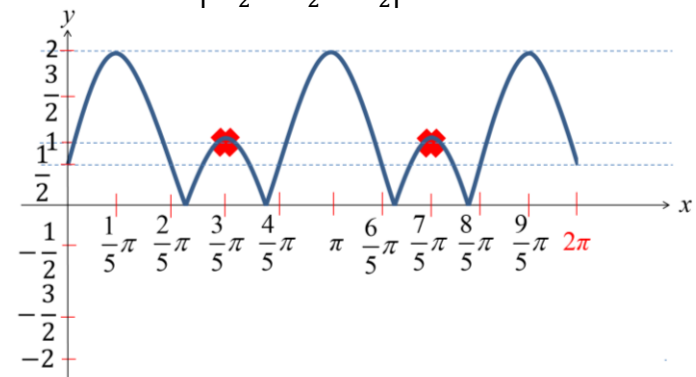
33. Lakar $y = -\frac{3}{2}\sin \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$.



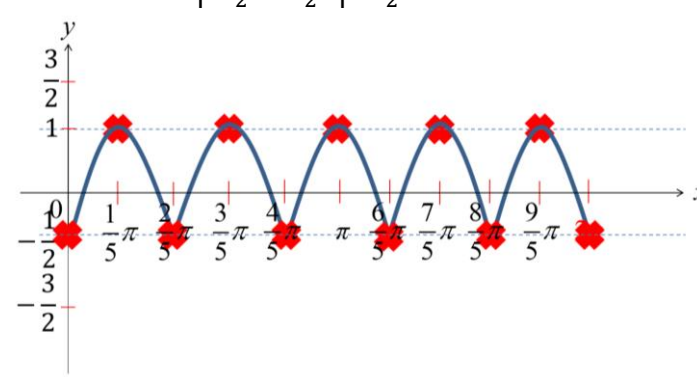
34. Lakar $y = 2\tan \frac{7}{4}x + 1$.



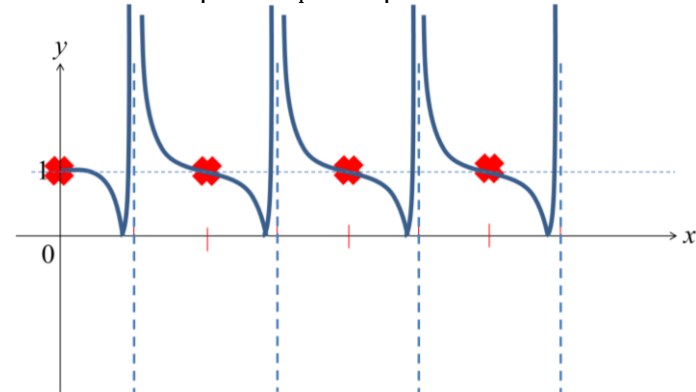
35. Lakar $y = \left| -\frac{3}{2}\sin \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \right|$.



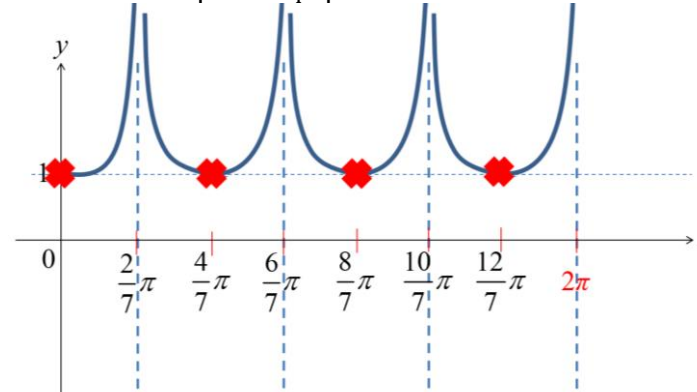
36. Lakar $y = \left| -\frac{3}{2}\sin \frac{5}{2}x \right| - \frac{1}{2}$.



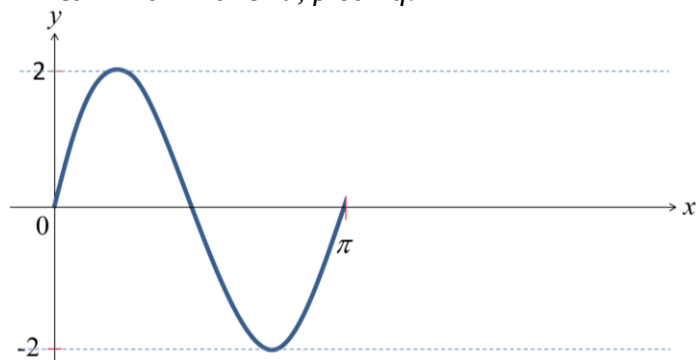
37. Lakar $y = \left| -2\tan \frac{7}{4}x + 1 \right|$.



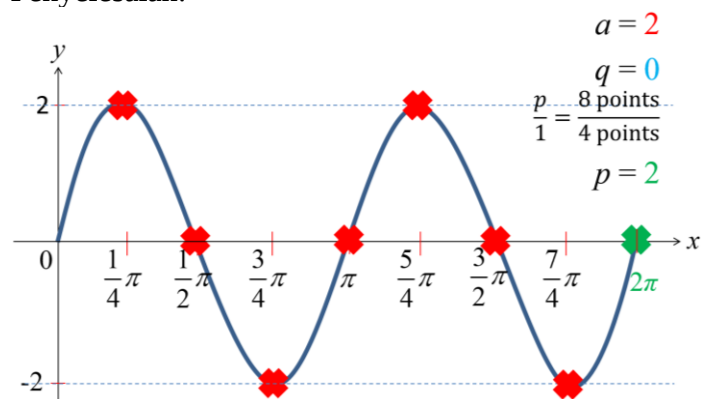
38. Lakar $y = \left| -2\tan \frac{7}{4}x \right| + 1$.



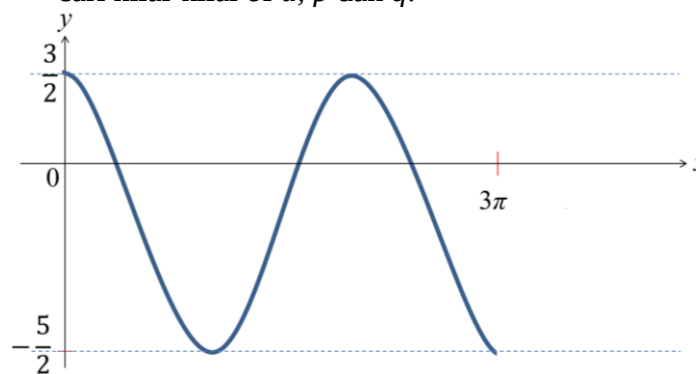
39. Diberi $y = a \sin px + q$,
cari nilai-nilai of a , p dan q .



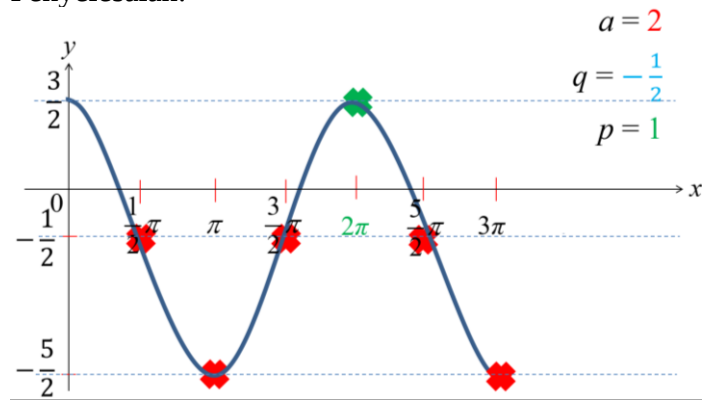
Penyelesaian:



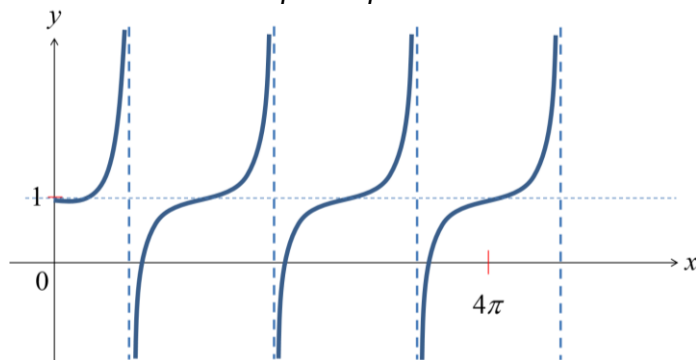
40. Diberi $y = a \cos px + q$,
cari nilai-nilai of a , p dan q .



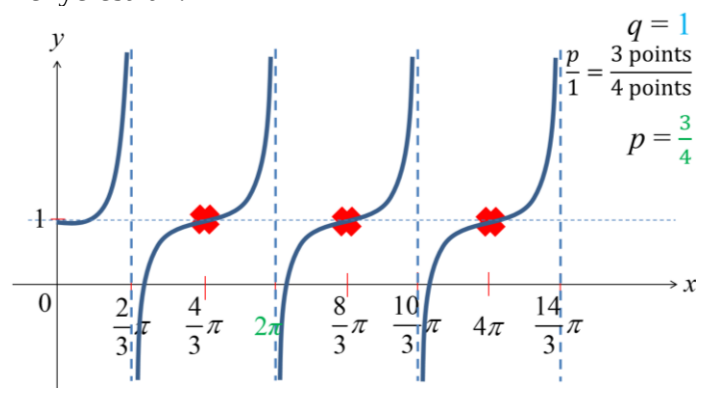
Penyelesaian:



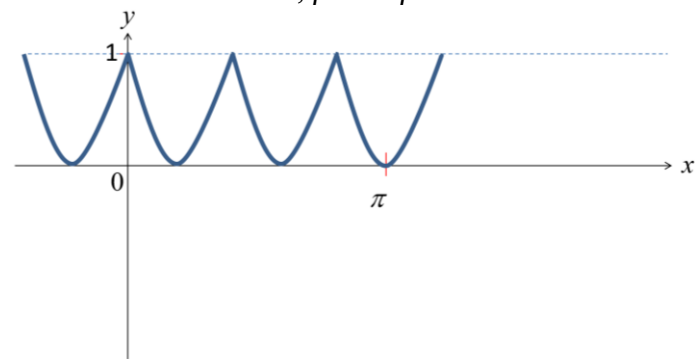
41. Diberi $y = \tan px + q$,
cari nilai-nilai of p dan q .



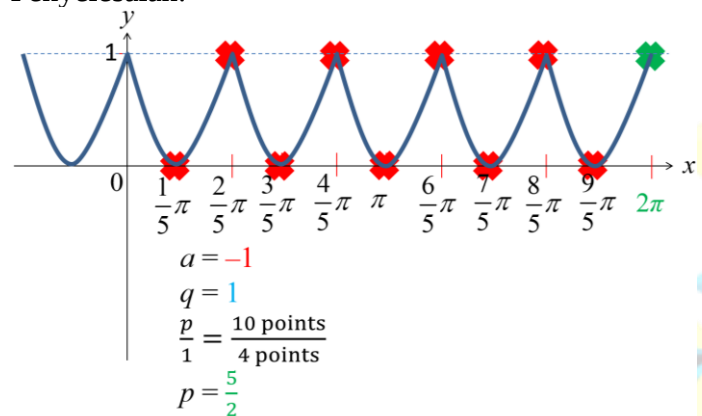
Penyelesaian:



42. Diberi $y = a|\sin px| + q$,
cari nilai-nilai of a , p dan q .



Penyelesaian:



43. SPM 2018 Kertas 1 Soalan 11(b):

Diagram 4 shows part of the graph $y = \frac{3}{2} \sin 6\alpha$.

Rajah 4 menunjukkan sebahagian daripada graf $y = \frac{3}{2} \sin 6\alpha$.

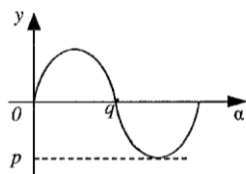
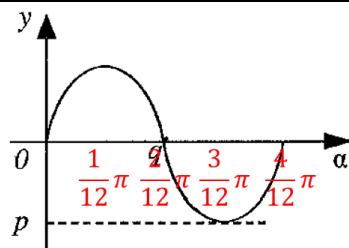


Diagram 4
Rajah 4

State the value of p and of q .

Nyatakan nilai p dan nilai q .

[2 marks]
[2 markah]



$$p = -\frac{3}{2}$$

$$6 \times 4 = 24$$

$$\frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$$

$$q = \frac{1}{6}\pi \text{ or } 30^\circ$$

44. SPM 2017 Kertas 1 Soalan 14:

14 Diagram 6 shows the graph of $y = m \cos px - 1$ for $0 \leq x \leq \pi$.

Rajah 6 menunjukkan graf $y = m \cos px - 1$ untuk $0 \leq x \leq \pi$.

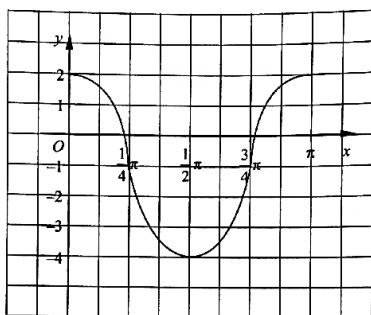


Diagram 6
Rajah 6

State

Nyatakan

(a) the value of
nilai bagi

- (i) m ,
(ii) p ,

(b) the number of solutions for $m \cos px = -3$.

bilangan penyelesaian untuk $m \cos px = -3$.

[3 marks]
[3 markah]

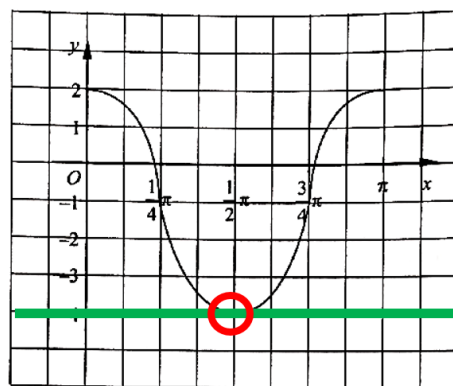


Diagram 6
Rajah 6

(a)(i) $m = 3$

(ii) $p = 2$

(b) $y = -3 - 1 = -4$

1 solution

45. SPM 2019 Kertas 1 Soalan 21:

21 Diagram 8 shows the graph of $y = |n \sin \alpha \cos \alpha|$ for $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Rajah 8 menunjukkan graf bagi $y = |n \sin \alpha \cos \alpha|$ untuk $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

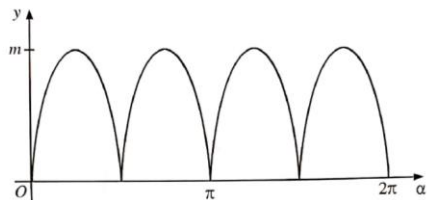


Diagram 8
Rajah 8

(a) Express m in terms of n .

Ungkapkan m dalam sebutan n .

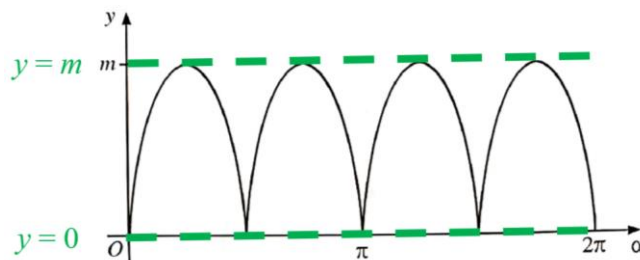
(b) There are 8 solutions when $y = k$, where k is a constant.

State the range of k in terms of m .

Terdapat 8 penyelesaian apabila $y = k$, dengan keadaan k ialah pemalar.

Nyatakan julat k dalam sebutan m .

[3 marks]
[3 markah]



(a) $y = \left| \frac{n}{2} (2 \sin \alpha \cos \alpha) \right|$

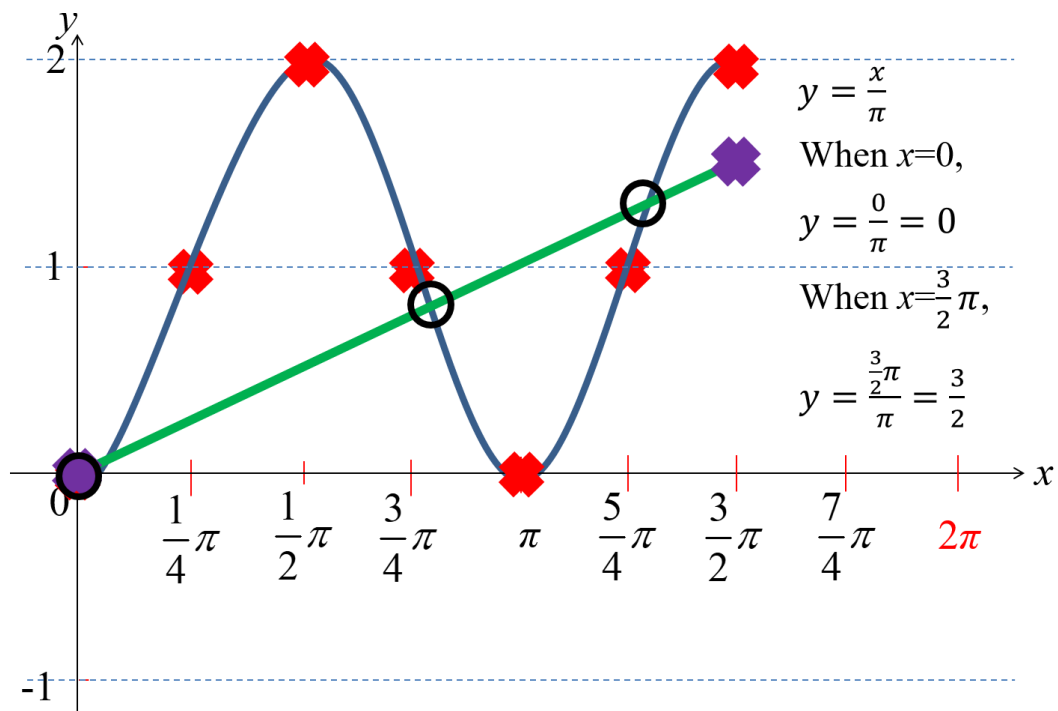
$y = \left| \frac{n}{2} (\sin 2\alpha) \right|$

$m = \frac{n}{2}$

(b) $0 < k < m$

46. (a) Lakar $y = 1 - \cos 2x$, bagi $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.
 (b) Seterusnya, dengan menggunakan paksi yang sama, lakar satu graf yang sesuai untuk mencari bilangan penyelesaian bagi persamaan $\pi \cos 2x = \pi - x$. Nyatakan bilangan penyelesaian itu.

(a)



(b) $\pi \cos 2x = \pi - x$
 $\frac{\pi \cos 2x}{\pi} = \frac{\pi - x}{\pi}$
 $\cos 2x = 1 - \frac{x}{\pi}$
 $-\cos 2x = -1 + \frac{x}{\pi}$
 $-\cos 2x + 1 = -1 + \frac{x}{\pi} + 1$
 $y = \frac{x}{\pi}$

- (c) Apabila $x=0$, $y = \frac{0}{\pi} = 0$
 Apabila $x=\frac{3}{2}\pi$, $y = \frac{\frac{3}{2}\pi}{\pi} = \frac{3}{2}$
 Bilangan penyelesaian = 3

47. SPM 2014 Kertas 2 Soalan 2:

(a) Sketch the graph of $y = 1 + \tan 2x$ for $0 \leq x \leq \pi$.

[3 marks]

Lakar graf $y = 1 + \tan 2x$ untuk $0 \leq x \leq \pi$.

[3 markah]

(b) Hence, using the same axes, sketch a suitable straight line to find the number of solutions for the equation $x + \pi \tan 2x = 0$ for $0 \leq x \leq \pi$.

State the number of solutions.

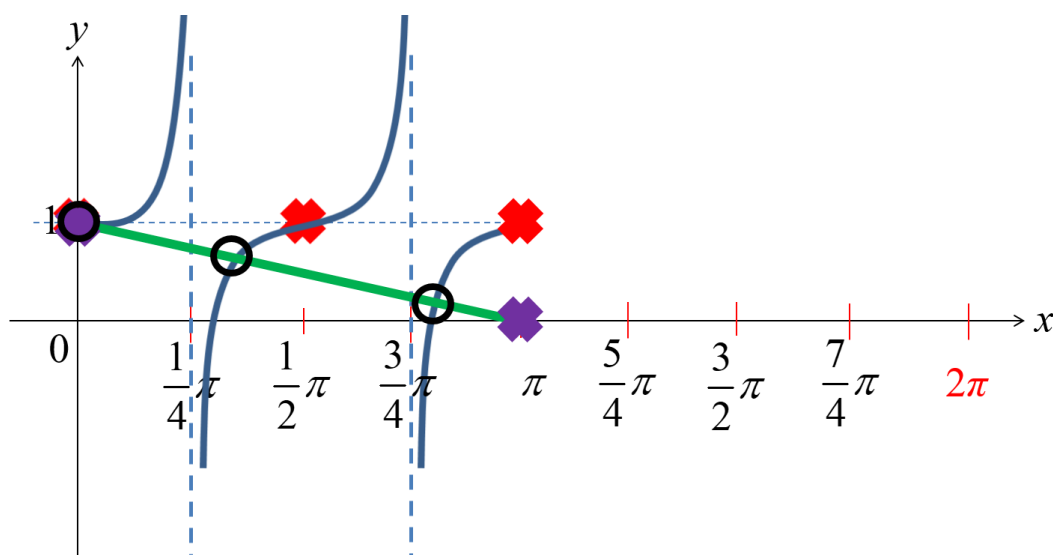
[3 marks]

Seterusnya, menggunakan paksi yang sama, lakar satu garis lurus yang sesuai untuk mencari bilangan penyelesaian bagi persamaan $x + \pi \tan 2x = 0$ untuk $0 \leq x \leq \pi$.

Nyatakan bilangan penyelesaian itu.

[3 markah]

(a)



(b) $x + \pi \tan 2x = 0$

$$\pi \tan 2x = -x$$

$$\frac{\pi \tan 2x}{\pi} = \frac{-x}{\pi}$$

$$\tan 2x = -\frac{x}{\pi}$$

$$\tan 2x + 1 = -\frac{x}{\pi} + 1$$

$$y = -\frac{x}{\pi} + 1$$

(c) Apabila $x = 0$, $y = -\frac{0}{\pi} + 1 = 1$

Apabila $x = \pi$, $y = -\frac{\pi}{\pi} + 1 = 0$

Bilangan penyelesaian = 3

LATIHAN

KERTAS 1:

Klon SPM 2016

1) Selesaikan persamaan $3 \cot 2\alpha = 4 - \tan 2\alpha$ untuk $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

[4 markah]

[Jawapan: $22.50^\circ, 35.78^\circ, 112.5^\circ, 125.78^\circ$]

Klon SPM 2017

2) Diberi bahawa $\cos \alpha = t$ dengan keadaan t ialah pemalar dan $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Ungkapkan dalam sebutan t

(a) $\sin(180^\circ + \alpha),$

(b) $\sec 2\alpha.$

[4 markah]

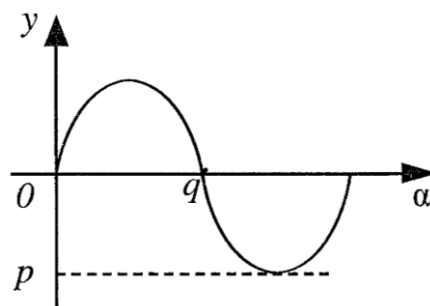
[Jawapan: (a) $-\sqrt{1-t^2}$; (b) $\frac{1}{2t^2-1}$]

Klon SPM 2018

3) (a) Diberi $\sin \theta = h$, nyatakan $\sin(180^\circ - \theta)$ dalam sebutan h .

[1 markah]

(b) Rajah menunjukkan sebahagian daripada graf $y = \frac{3}{5} \sin \frac{15}{4} \alpha$.



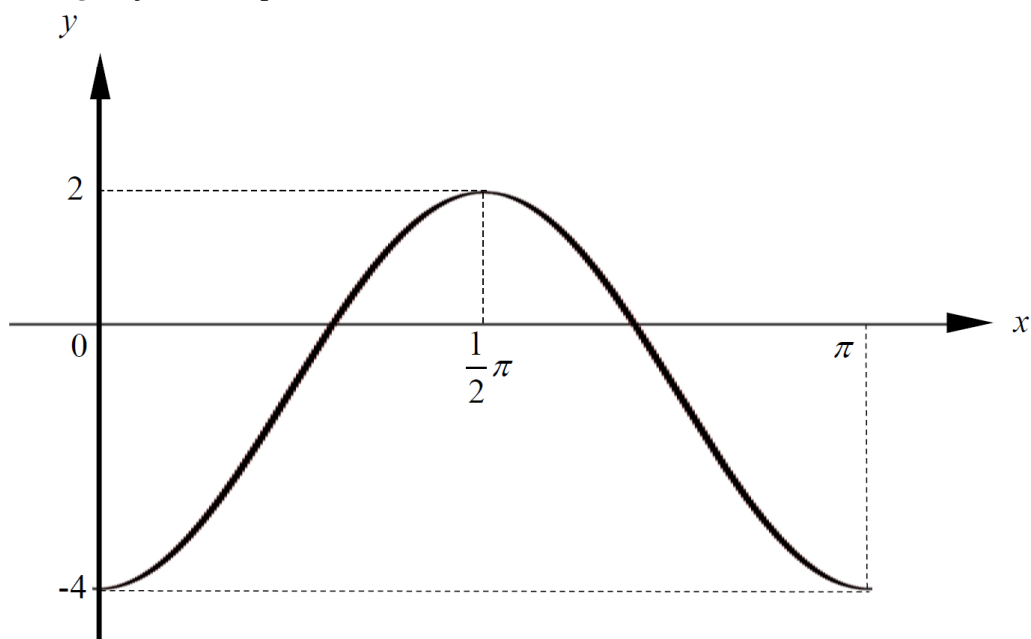
Nyatakan nilai p dan nilai q .

[3 markah]

[Jawapan: (a) h ; (b) $\frac{4}{15}\pi$ or 48°]

Klon SPM 2017

4) Rajah menunjukkan graf $y = m \cos px - 1$ untuk $0 \leq x \leq \pi$.



Nyatakan

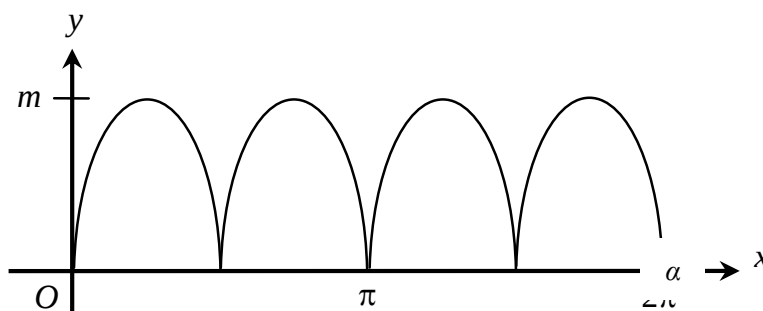
- (a) nilai bagi
- (i) m ,
 - (ii) p ,
- (b) bilangan penyelesaian untuk $m \cos px = 3$.

[3 markah]

[Jawapan: (a)(i) $m = -3$, (ii) $p = 2$; (b) 1]

Klon SPM 2019

5) Rajah menunjukkan graf bagi $y = |n \sin \alpha \cos \alpha|$ untuk $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.



- (a) Ungkapkan n dalam sebutan m .
- (b) Terdapat 8 penyelesaian apabila $y = k$, dengan keadaan k ialah pemalar. Nyatakan julat k dalam sebutan m .

[3 markah]

[Jawapan: (a) $n = 2m$; (b) $0 < k < m$]

KERTAS 2:

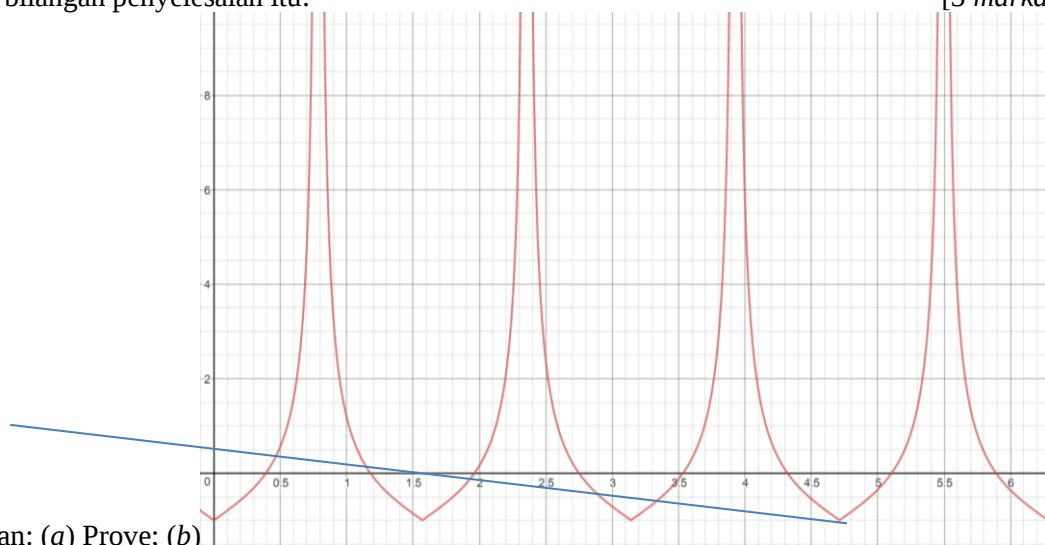
Klon SPM 2016

6) (a) Buktikan $\frac{\sin 2x}{\tan^2 x + 2 \cos^2 x - \sec^2 x} = \tan 2x$. [2 markah]

(b) Lakar graf bagi $y = |\tan 2x| - 1$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. [3 markah]

(c) Seterusnya, dengan menggunakan paksi yang sama, lakar satu garis lurus yang sesuai untuk mencari bilangan penyelesaian bagi persamaan $\left| \frac{\sin 2x}{\tan^2 x + 2 \cos^2 x - \sec^2 x} \right| + \frac{x}{\pi} = 2$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

Nyatakan bilangan penyelesaian itu. [3 markah]



[Jawapan: (a) Prove; (b) ; (c) 8]

Klon SPM 2017

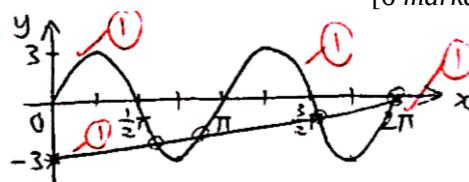
7) (a) Buktikan bahawa $2 \tan \theta \cos^2 \theta = \sin 2\theta$. [2 markah]

(b) Seterusnya, selesaikan persamaan $4 \tan \theta \cos^2 \theta - 1 = 0$ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$. [2 markah]

(c) (i) Lakar graf $y = 3 \sin 2\theta$ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(ii) Seterusnya, menggunakan paksi yang sama, lakar satu garis lurus yang sesuai untuk mencari bilangan penyelesaian bagi persamaan $4 \tan \theta \cos^2 \theta = x - 2\pi$ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Nyatakan bilangan penyelesaian itu.

[6 markah]

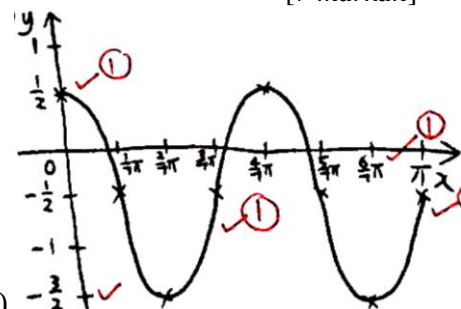


[Jawapan: (a) Prove; (b) 15°, 75°, 195°, 255°; (c)(i) , (ii) 4]

Klon SPM 2018

- 8) (a) Buktikan $\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$. [3 markah]
- (b) Seterusnya,
- (i) selesaikan persamaan $\sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ untuk $0 \leq x \leq \pi$ dan beri jawapan anda dalam bentuk pecahan termudah dalam sebutan π rad,
- (ii) lakar graf bagi $y = \sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$ untuk $0 \leq x \leq \pi$.

[7 markah]

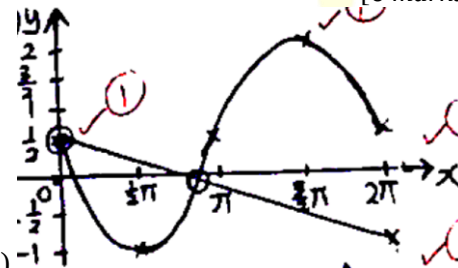


[Jawapan: (a) Buktikan; (b)(i) $\frac{2}{21}\pi$, $\frac{10}{21}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, (ii)]

Klon SPM 2019

- 9) (a) (i) Buktikan bahawa $\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$.
- (ii) Seterusnya, tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai $\tan 22.5^\circ$. [4 markah]
- (b) (i) Lakar graf bagi $y = -\frac{3}{2} \sin A + \frac{1}{2}$ untuk $0 \leq A \leq 2\pi$.
- (ii) Seterusnya, dengan menggunakan paksi yang sama, lakar satu garis lurus yang sesuai untuk mencari bilangan penyelesaian bagi persamaan $\left(\cot \frac{A}{2}\right)(1 - \cos A) = -\frac{A}{2\pi}$ untuk $0 \leq A \leq 2\pi$. Nyatakan bilangan penyelesaian itu.

[6 markah]



[Jawapan: (a) Prove, (ii) $\sqrt{2} - 1$; (b)(i) , (ii) 2]



MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

11. PILIHATUR DAN GABUNGAN



NOTA

Pilihatur merupakan suatu kaedah yang digunakan untuk **menyusun sesuatu peristiwa** mengikut kemungkinan yang akan ada dengan **syarat** atau mengambil kira **faktor susunan**.

- Bilangan **n** benda yang berlainan hendak disusun pada satu baris dengan melibatkan **r** benda pada sesuatu ketika, maka bilangan susunan atau pilihatur yang boleh dilakukan adalah:

$$= {}^n P_r$$

***Peringatan:**

$${}^n P_n = n!$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times (n-r+1)$$

Gabungan merupakan pemilihan gabungan **r** objek daripada suatu kumpulan **n** objek **TANPA SYART** atau mengambil kira **faktor susunan**.

- Bilangan gabungan **r** objek dipilih daripada **n** objek:

$$= {}^n C_r$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

***Peringatan:**

$${}^n C_0 = 1$$

$${}^n C_n = 1$$

$${}^n C_r = {}^n C_{n-r}$$

PILIHATUR	GABUNGAN
Bilangan cara untuk memilih objek r daripada n	
Pengulangan tidak dibenarkan	
Susunan PENTING	Susunan TIDAK PENTING
${}^n P_r$	${}^n C_r$
Kata Kunci: Susunan, dijadualkan, arahan	Kata Kunci: Kumpulan, contoh, pilihan

NOTA TAMBAHAN



Pilih Atur dan Gabungan | Matematik Tambahan SPM Tingkatan 5 - Bab 6 (KBSM)

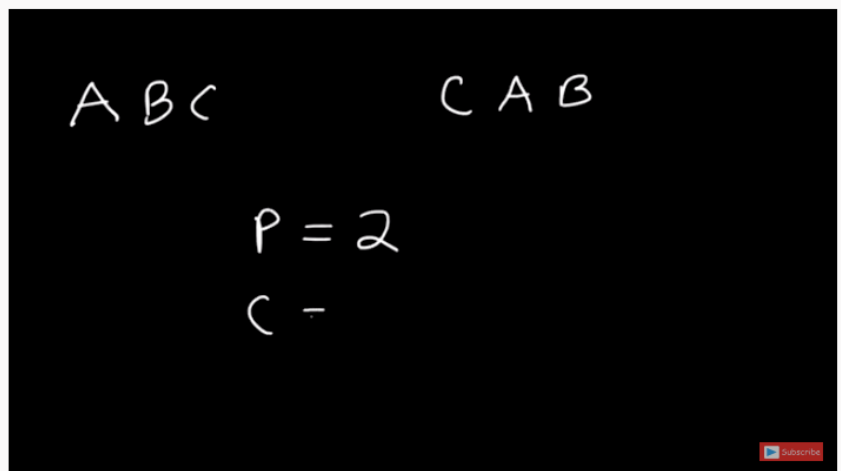
<https://www.youtube.com/watch?v=RA-3XGjB3UM>

Sumber:

Instagram: <https://www.instagram.com/lqmkim>

Facebook: <https://www.facebook.com/lqmkim>

Twitter: <https://www.twitter.com/LqmKim>



Permutations and Combinations Tutorial

<https://www.youtube.com/watch?v=XJnIdRXUi7A>

Sumber:

<https://www.video-tutor.net>

Patreon: <https://www.patreon.com/MathScienceTutor>

Amazon Store: <https://www.amazon.com/shop/theorgani...>

CONTOH

Contoh 1:

15 pelari mengikuti larian marathon, tetapi hanya 4 laluan yang disediakan. Berapakah banyak cara 4 daripada 15 pelari boleh **disusun** pada laluan tersebut?

Jawapan:

$${}^nP_r = {}^{15}P_4. \text{ (Menggunakan kalkulator)}$$

Tekan:

15	SHIFT	nP_r	4	=
ANS: 32760				

$${}^nP_r = {}^{15}P_4 = 32760$$

Nota:

1) Kenal pasti sama ada konsep yang digunakan adalah Pilihatur (nP_r) atau Gabungan (nC_r) (Kata Kunci)

- Ada syarat untuk susunan (nP_r)
- Gabungan kedudukan (nC_r)

2) Kenal pasti n dan r dalam soalan.

3) Selesaikan menggunakan formula.

Contoh 2:

Satu **kumpulan** yang terdiri daripada 6 orang ahli **dipilih** secara rawak daripada 5 orang guru dan 5 orang pelajar. Cari bilangan cara kumpulan itu boleh dibentuk.

Jawapan:

Memilih 6 daripada 10 (5 guru + 5 pelajar)

$${}^nC_r = {}^{10}C_6 \text{ (Guna kalkulator)}$$

Tekan:

10	SHIFT	nC_r	6	=
ANS: 210				

$${}^nC_r = {}^{10}C_6 = 210$$

Nota:

1) Kenal pasti sama ada konsep yang digunakan adalah Pilihatur (nP_r) atau Gabungan (nC_r) (Kata Kunci)

- Ada syarat untuk susunan (nP_r)
- Gabungan kedudukan (nC_r)

2) Kenal pasti n dan r dalam soalan.

3) Selesaikan menggunakan formula.

Contoh 3:

Rajah menunjukkan lima keping kad huruf yang berlainan.

T	E	A	C	H
---	---	---	---	---

a) Cari bilangan cara **susunan** yang mungkin, dalam satu baris, semua kad tersebut.

b) Cari bilangan cara **susunan** dengan keadaan huruf E dan huruf H adalah bersebelahan.

Jawapan Contoh 3:

a) Bilangan cara menyusun 5 kad dalam sebaris

$${}^5P_5 = 5! = 120$$

b) Jika huruf E dan H disusun bersebelahan, EH dianggap 1 unit.



$$\text{Bilangan cara} = {}^4P_4 = 4! = 24$$

$$\text{E dan H disusun sesama mereka, bilangan cara} \\ = {}^2P_2 = 2! = 2$$

$$\text{Maka jumlah bilangan susunan} \\ = 24 \times 2 = 48$$

Nota:

1) Kenal pasti sama ada konsep yang digunakan adalah Pilihatur (nP_r) atau Gabungan (nC_r) (Kata Kunci)

- Ada syarat untuk susunan (nP_r)
- Gabungan kedudukan (nC_r)

2) Kenal pasti n dan r dalam soalan.

3) Selesaikan menggunakan formula.

Contoh 4:

a) Berapa banyak carakah satu **ahli Jawatankuasa** boleh dibentuk sekiranya 5 ahli **dipilih** daripada 8 orang lelaki dan 4 orang perempuan

b) Berapa banyak carakah ahli Jawatankuasa tersebut terdiri daripada sekurang-kurangnya 3 orang perempuan termasuk dalam ahli Jawatankuasa tersebut?

Jawapan:

a) Membentuk 5 ahli daripada 12 ahli (8 lelaki + 4 perempuan)

$${}^nC_r = {}^{12}C_5 = 792$$

b) Membentuk 5 ahli dengan sekurang-kurangnya 3 perempuan

$$= (3 \text{ daripada } 4 \text{ perempuan dan } 2 \text{ daripada } 8 \text{ lelaki}) \text{ ATAU } (4 \text{ daripada } 4 \text{ perempuan dan } 1 \text{ daripada } 8 \text{ lelaki})$$

$$= ({}^4C_3 \times {}^8C_2) + ({}^4C_4 \times {}^8C_1) \quad (\text{Guna kalkulator})$$

$$= 112 + 8$$

$$= 120$$

Nota:

1) Kenal pasti sama ada konsep yang digunakan adalah Pilihatur (nP_r) atau Gabungan (nC_r) (Kata Kunci)

- Ada syarat untuk susunan (nP_r)
- Gabungan kedudukan (nC_r)

2) Kenal pasti n dan r dalam soalan.

3) Selesaikan menggunakan formula.

Contoh 5:

Seorang pelajar kolej tempatan boleh **memilih** daripada 5 subjek Komputer dan 4 subjek Sains. Berapa banyak carakah dia boleh memilih 3 subjek Komputer dan 2 subjek Sains?

Jawapan:

nC_r

= Memilih 3 daripada 5 subjek Komputer dan 2 daripada 4 subjek Sains.

= ${}^5C_3 \times {}^4C_2$ (Guna kalkulator)

= 10×6

= 60

Contoh 6:

a) Berapa banyak carakah nombor empat digit yang boleh dibentuk daripada digit 2,3,4,5,6,7 dan 8 jika setiap digit hanya boleh digunakan sekali?

b) Berapa banyak daripada nombor empat digit tersebut adalah lebih besar daripada 4000?

Jawapan:

a) Bentuk 4 digit daripada 7 digit.

${}^7P_4 = 840$ (Guna Kalkulator)

b)

--	--	--	--

4,5,6,7,8 (1 dipilih untuk nilai lebih 4000) Tinggal 6 digit (1 telah dipilih) untuk isi 3 tempat lagi.

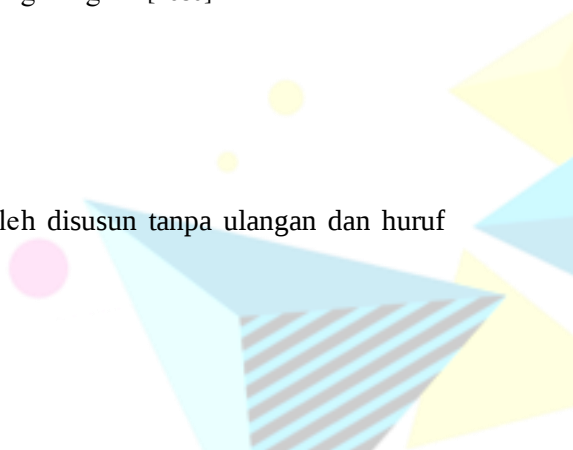
Nota:

Soalan membentuk kata kekunci, nombor berdigit merupakan dalam bentuk arahan (Guna nP_r)



LATIHAN

1. Berapa banyak cara boleh menempatkan 6 pelajar pada 3 kerusi yang disusun sebaris? [120]
 2. Terdapat 8 peserta dalam suatu pertandingan. Berapa banyak carakah tiga tempat utama boleh dimenangi oleh peserta? [336]
 3. Suatu soalan peperiksaan mempunyai enam soalan. Pelajar hanya perlu menjawab empat daripadanya. Berapa banyak carakah pelajar boleh menjawab empat soalan? [360]
 4. Sekumpulan 5 pemain akan dipilih daripada 12 pemain. Berapa banyak carakah kumpulan tersebut boleh dibentuk? [792]
 5. Rajah menunjukkan 4 huruf dan 3 digit. Satu kod mengandungi 3 huruf dan 2 digit. Cari bilangan cara kod tersebut boleh dibentuk? [144]

A	B	C	D	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---
 6. Berapa banyak cara 4 daripada huruf “COMPUTER” boleh disusun tanpa pengulangan? [1680]
 7. Berapa banyak carakah semua huruf di dalam perkataan “SECTION” boleh disusun tanpa ulangan dan huruf pertama ialah huruf vocal? [2160]
- 



8. Berapa banyak carakah semua huruf di dalam perkataan “SECTION” boleh disusun tanpa ulangan dan huruf vocal adalah bersebelahan? [720]

9. Persatuan Ibu Bapa dan Guru sebuah sekolah mempunyai ahli yang terdiri daripada 3 guru dan 5 ibu bapa. Cari bilangan cara yang boleh membentuk ahli daripada 10 guru dan 15 ibu bapa. [360360]

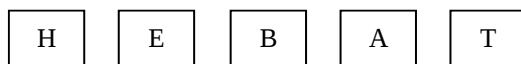
10. Berapa banyak carakah separuh huruf daripada perkataan “MODULE” boleh disusun tanpa pengulangan? [120]

11. Satu pasukan bahas terdiri daripada 5 orang pelajar. Pasukan ini dipilih daripada 4 ketua tingkatan, 2 penolong ketua tingkatan dan 6 pengawas. Kira bilangan cara yang berlainan pasukan itu boleh dibentuk jika

a) tiada syarat dikenakan [792]

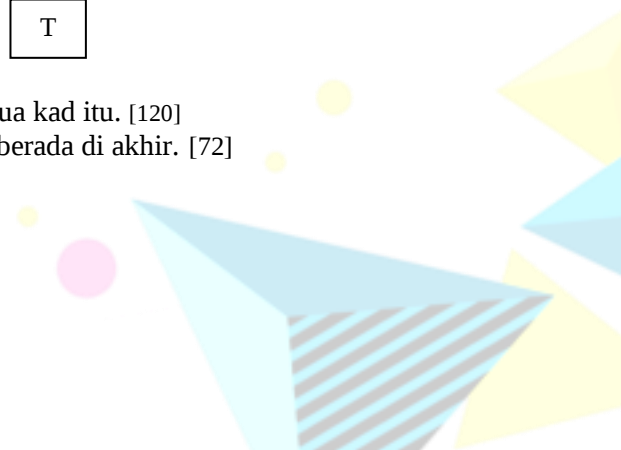
b) pasukan itu mempunyai hanya 1 ketua tingkatan dan tepat 3 pengawas. [160]

12. Rajah menunjukkan lima keping kad huruf yang berlainan.



a) Carikan bilangan cara susunan yang mungkin, dalam satu baris, semua kad itu. [120]

b) Carikan bilangan cara susunan itu dengan keadaan huruf konsonan berada di akhir. [72]





MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

12. TABURAN KEBARANGKALIAN



NOTA DAN CONTOH

RUMUS TABURAN BINOMIAL	RUMUS TABURAN NORMAL
1. $P(X = r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}$ 2. Mean / Min, $\mu = np$ 3. $\sigma = \sqrt{npq}$	1. $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

TABURAN BINOMIAL

A. Selesaikan masalah-masalah berikut.

	Contoh	Penyelesaian
1.	Kebarangkalian bahawa hujan akan turun pada suatu hari tertentu ialah $\frac{3}{5}$. Cari kebarangkalian bahawa dalam suatu minggu tertentu, hujan akan turun (a) tepat 4 hari, (b) lebih daripada 5 hari.	Katakan X adalah bilangan hari akan hujan $n = 7, p = \frac{3}{5}, q = \frac{2}{5}$ (a) $P(X = 4) = {}^7C_4 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^3$ $= 0.2903$ (b) $P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7)$ $= {}^7C_6 \left(\frac{3}{5}\right)^6 \left(\frac{2}{5}\right)^1 + {}^7C_7 \left(\frac{3}{5}\right)^7 \left(\frac{2}{5}\right)^0$ $= 0.1586$
2.	Kebarangkalian mendapat sebiji oren busuk dari sebuah kotak ialah 0.2. Christina memilih 6 biji oren. Hitung kebarangkalian bahawa (a) hanya sebiji oren itu busuk. (b) semua oren itu elok.	Biarkan X mewakili bilangan oren busuk. $n = 6, p = 0.2, q = 0.8$ (a) $P(X = 1) = {}^6C_1 (0.2)^1 (0.8)^5$ $= 0.3932$ (b) $P(\text{semua oren elok}) = P(\text{tiada oren busuk})$ $P(X = 0) = {}^6C_0 (0.2)^0 (0.8)^6$ $= 0.2621$
3.	Kebarangkalian bahawa Amirul akan sampai ke peringkat akhir pertandingan badminton ialah 0.8. Cari kebarangkalian bahawa dalam 5 pertandingan badminton, Amirul akan sampai ke peringkat akhir (a) tepat 2 kali, (b) lebih daripada dua kali.	[(a) 0.0512; (b) 0.73728]
4.	Di dalam sebuah kawasan perumahan, 7 daripada 10 keluarga memiliki sebuah kereta. Jika satu sampel 8 keluarga dipilih, cari kebarangkalian bahawa bilangan keluarga yang memiliki sebuah kereta ialah (i) tepat 5 keluarga, (ii) sekurang-kurangnya 2 keluarga.	[(a) 0.2541; (b) 0.9987]



5.	Dalam satu kajian, didapati 25% daripada mentol di sebuah kedai tertentu telah rosak. Cari kebarangkalian bahawa daripada 10 biji mentol, (i) tepat 3 biji mentol rosak, (ii) lebih daripada 8 biji mentol berada dalam keadaan yang baik.	[(a) 0.2503; (b) 0.2440]
6.	Kebarangkalian Bob akan menang dalam suatu pertandingan catur ialah $\frac{3}{4}$. Jika dia bermain 5 perlawanan, hitung kebarangkalian bahawa dia akan menang (a) tepat empat perlawanan. (b) lebih dari lima kali.	[(a) 0.1730 ; (b) 0.4449]
7.	Kebarangkalian sebuah bas akan tiba lewat di sekolah ialah 0.15. Cari kebarangkalian bahawa dalam 5 hari persekolahan tertentu, bas itu akan lewat (a) 2 hari. (b) sekurang-kurangnya sekali	[(a) 0.1382 ; (b) 0.5563]
8.	Kebarangkalian tembakan seorang penembak mengenai sasaran ialah 0.8. Jika dia melepaskan 9 das tembakan, cari kebarangkalian bahawa tembakannya akan mengenai sasaran (a) tepat 8 kali. (b) sekurang-kurangnya 8 kali.	[(a) 0.3020 ; (b) 0.4362]

B. Cari min, varians dan sisihan piawai bagi setiap taburan binomial berikut.

	Contoh	Min $\mu = np$	Varians $\sigma^2 = npq$	Sisihan piawai $\sigma = \sqrt{npq}$
1.	80% durian di dalam sebuah bakul berada dalam keadaan baik. Ali mengambil satu sampel 12 biji durian. $\Rightarrow n = 12, p = 0.8, q = 0.2$	$\mu = 12(0.8)$ $= 9.6$	$\sigma^2 = 12(0.8)(0.2)$ $= 1.92$	$\sigma = \sqrt{1.92}$ $= 1.386$
2.	Dalam satu kajian, didapati 75% isi rumah di sebuah kawasan perumahan memiliki sebuah telefon bimbit. 40 isi rumah dipilih untuk kajian tersebut	[30]	[7.5]	[2.739]
3.	Dalam satu ujian, kebarangkalian bahawa seorang calon lulus ujian ialah 0.6. Pada suatu hari tertentu, 60 orang calon menduduki ujian tersebut.	[36]	[14.4]	[3.795]
4.	3 daripada 7 bateri yang dijual di pasar malam adalah rosak. Dina membeli 126 biji bateri dalam satu minggu.	[54]	[30.86]	[5.555]
5.	Suatu ujian mengandungi 28 soalan. Setiap soalan diikuti oleh 4 pilihan jawapan, dengan keadaan hanya satu jawapan yang betul.	[7]	[5.25]	[2.29]
6.	Sebiji dadu yang adil dilambung 15 kali berturut-turut. Kebarangkalian mendapat nombor 3 ialah $\frac{1}{6}$.	[2.5]	[2.083]	[1.443]
7.	Sebuah kelas terdiri daripada 48 orang murid dan 85% daripada mereka lulus dalam satu ujian Matematik.	[40.8]	[6.12]	[2.474]
8.	Sebuah jet pejuang melepaskan 30 biji bom dan kebarangkalian sebiji bom akan mengenai sasaran ialah 0.7.	[21]	[6.3]	2.510]

TABURAN NORMAL INOVASI TAB 4Y

PANDUAN MENGGUNAKAN TEKNIK 'TAB 4Y' UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH YANG MELIBATKAN KEBARANGKALIAN BAGI TABURAN NORMAL.

Cara 1: Diberi X , cari kebarangkalian P .

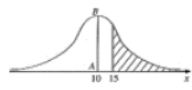
Dari Kiri Ke Kanan – Guna Kalkulator

LANGKAH 1

LANGKAH 2

LANGKAH 3

LANGKAH 4

X	Z	< Graf >	$P(X \leq x)$ atau $P(X \geq x)$
Tuliskan nilai pemboleh ubah rawak selanjar (Bacaan normal)	Cari nilai skor-z menggunakan rumus $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	 Lakar graf loceng, tandakan kawasan	Cari kebarangkalian dengan menggunakan kalkulator.

Cara 2 : Diberi kebarangkalian, P , cari skor- Z atau X .

Dari Kanan ke Kiri - Baca Sifir Taburan Normal

LANGKAH 4

LANGKAH 3

LANGKAH 2

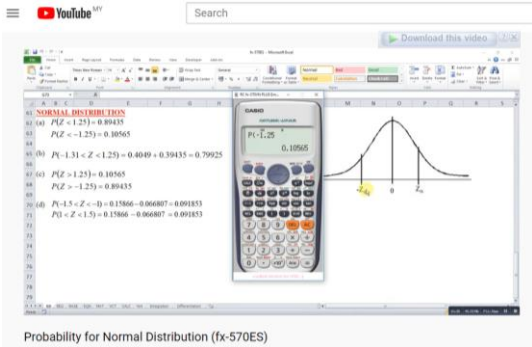
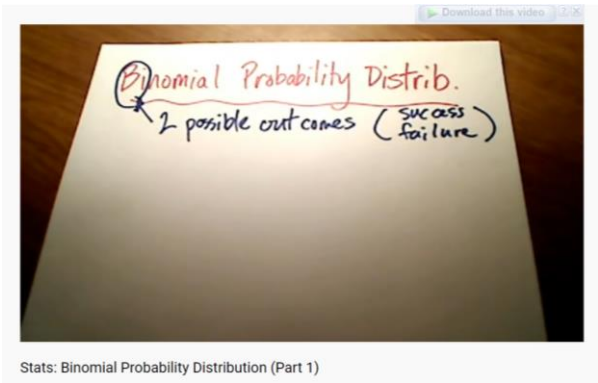
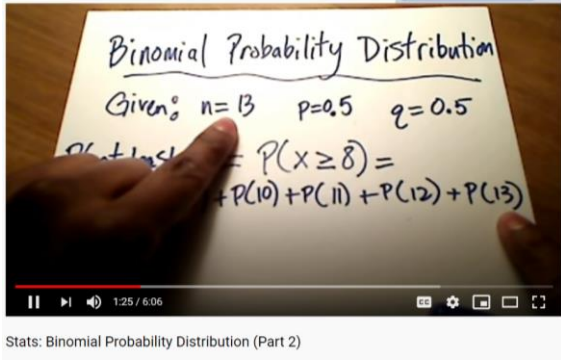
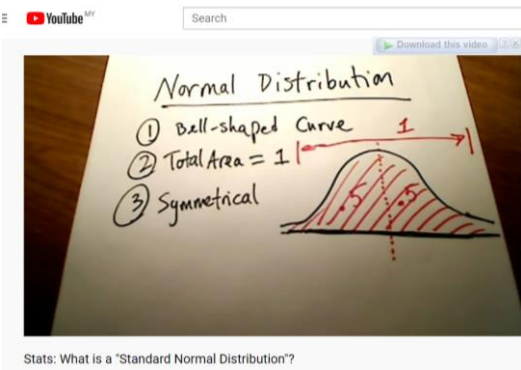
LANGKAH 1

X	Z	< Graf >	$P(X \leq x)$ atau $P(X \geq x)$
Cari nilai pemboleh ubah rawak selanjar X menggunakan rumus $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	Cari nilai skor-z menggunakan sifir Taburan Normal Piawai, rujuk graf yang dilakar.	 Lakar graf loceng, tandakan kawasan	Tuliskan kebarangkalian yang diberi dalam soalan.

HAK CIPTA : JAMALIAH BINTI MOHD. ELMI, SMK TAMPARULI, SABAH. 2019. 016-6636529.

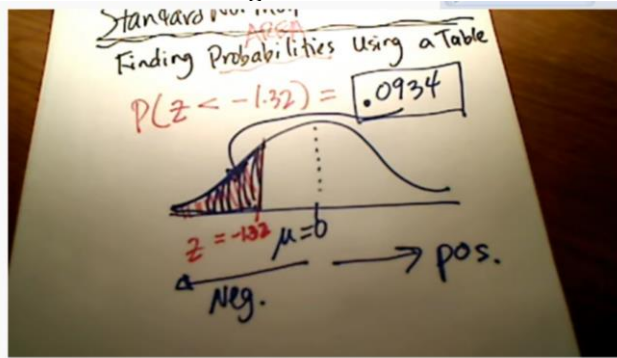
BIL.	LINK VIDEO	QR CODE																
1.	1. SPM 2014 K2 B7 (b) Jisim ahli-ahli pengakap dalam sekolah itu adalah mengikut taburan normal dengan min 48 kg dan sisihan piawai 5.8 kg. Cari (i) kebarangkalian bahawa seorang ahli yang dipilih secara rawak dari kumpulan itu mempunyai jisim kurang daripada 45 kg. [0.30251] [51.91 kg] [5 markah] (ii) nilai m, jika 25% daripada ahli pengakap itu mempunyai jisim lebih daripada m kg. [5 markah] Penyelesaian : $\mu = 48, \sigma = 5.8$ (i) <table><thead><tr><th>X</th><th>Z</th><th>< Graf ></th><th>$P(X < 45)$</th></tr></thead><tbody><tr><td>45</td><td>$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$= \frac{45 - 48}{5.8}$$= -0.5172$</td><td></td><td></td></tr></tbody></table> (ii) <table><thead><tr><th>X</th><th>Z</th><th>< Graf ></th><th>$P(X > m)$</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table>	X	Z	< Graf >	$P(X < 45)$	45	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ $= \frac{45 - 48}{5.8}$ $= -0.5172$			X	Z	< Graf >	$P(X > m)$					
X	Z	< Graf >	$P(X < 45)$															
45	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ $= \frac{45 - 48}{5.8}$ $= -0.5172$																	
X	Z	< Graf >	$P(X > m)$															



2.	Cara menggunakan kalkulator fx 570ES  Probability for Normal Distribution (fx-570ES) Link : https://youtu.be/L-AFeE9E5Ts	
3.	Memahami Kebarangkalian Taburan Binomial (1)  Stats: Binomial Probability Distribution (Part 1) Link : https://youtu.be/gAkyLGuUbh0	
4.	Memahami Kebarangkalian Taburan Binomial (2)  Stats: Binomial Probability Distribution (Part 2) Link : https://youtu.be/t9A11e7xNc8	
5.	Memahami Kebarangkalian Taburan Normal (1)  Stats: What is a "Standard Normal Distribution"? Link : https://youtu.be/c11d3vVM5v8	

6.

Menentukan Kebarangkalian Taburan Normal

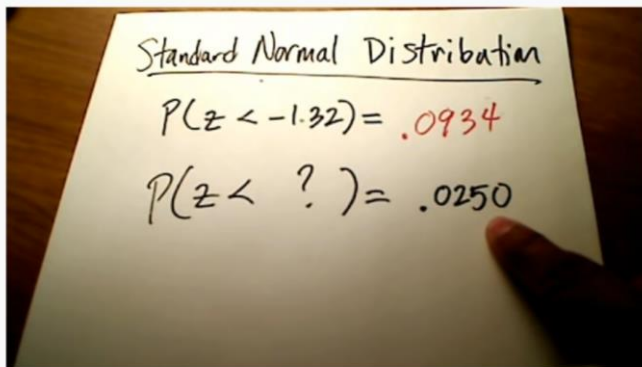


Stats: Finding Probability Using a Normal Distribution Table

Link : <https://youtu.be/zZWd56VIN7w>

7.

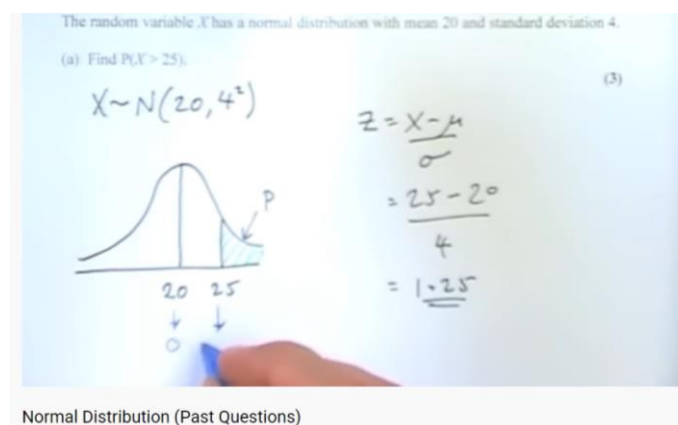
Menentukan Kebarangkalian Taburan Normal (2)



Stats: Finding Z-value Given the Probability

Link : <https://youtu.be/ER-e1wwhjXY>

8.



Normal Distribution (Past Questions)

Link : <https://youtu.be/odwfM7LjCVY>

C. Selesaikan.

	<i>Contoh</i>	<i>Penyelesaian</i>
1.	Markah yang diperoleh murid-murid dalam suatu ujian bertaburan secara normal dengan min 72 yang dan sisihan piawai 15. Jika seorang murid dipilih secara rawak, cari kebarangkalian bahawa markah yang diperolehnya adalah (a) kurang daripada 68. (b) antara 69 dan 78.	Diberi $\mu = 72$, $\sigma = 15$ Biarkan X mewakili markah yang diperoleh seorang murid. (a) $P(X < 68) = P\left(Z < \frac{68-72}{15}\right)$ $= P(Z < -0.267)$ $= 0.3947$ (b) $P(69 < X < 78) = P\left(\frac{69-72}{15} < Z < \frac{78-72}{15}\right)$ $= P(-0.2 < Z < 0.4)$ $= 0.2347$
2.	Umur bagi 80 00 orang penduduk di sebuah bandar bertaburan secara normal dengan min 45 tahun dan varians 36 tahun². (a) Hitung kebarangkalian bahawa umur seorang penduduk yang dipilih secara rawak adalah lebih daripada 48 tahun. (b) Anggarkan bilangan penduduk yang berumur melebihi 40 tahun.	[(a) 0.3085 ; (b) 63800]
3.	Jangka hayat sejenis bateri bertaburan secara normal dengan min 150 jam dan varians 25 jam. (a) Cari kebarangkalian bahawa sebiji bateri yang dipilih secara rawak mempunyai jangka hayat antara 140 jam dan 148 jam. (b) Diberi 10% daripada bateri itu mempunyai jangka hayat lebih daripada x jam. Cari nilai x. (c)	[(a) 0.3218 ; (b) 156.4]
4.	Berat bagi sekumpulan pelajar bertaburan secara normal dengan min 56 kg dan sisihan piawai 8 kg. (a) Cari berat bagi seorang pelajar jika skor piawai bagi berat pelajar itu ialah 1.75. (b) Jika seorang pelajar diijpilih secara rawak, cari kebarangkalian bahawa pelajar itu mempunyai berat melebihi 63 kg.	[(a) $X = 70$; (b) 0.1908]



5.	Jangka hayat bagi mentol yang dihasilkan oleh sebuah kilang pada suatu hari bertaburan secara normal dengan min 60 jam dan sisihan piawai 12 jam. (a) Cari peratus mentol yang mempunyai jangka hayat yang melebihi 75 jam. (b) Jika 85 mentol mempunyai jangka hayat yang melebihi 75 jam, cari jumlah mentol yang dihasilkan oleh kilang itu pada hari tersebut (kepada integer terdekat).	[(a) 10.56% ; (b) 805]
6.	Markah yang diperoleh sekumpulan pelajar bertaburan secara normal dengan min 45 dan varians 36. (a) Jika seorang pelajar dipilih secara rawak, hitung kebarangkalian bahawa markahnya adalah kurang daripada 48. (b) Diberi bahawa 35% pelajar mendapat markah lebih daripada k markah, cari nilai k.	[(a) 0.6915 ; (b) $k = 47.31$]
7.	Skor bagi 14 500 calon dalam satu peperiksaan ditaburkan secara normal dengan min 58 dan sisihan piawai 16. (a) Jika skor minimum untuk mendapat cemerlang ialah 70, anggarkan bilangan calon yang cemerlang dalam peperiksaan itu. (b) Jika 5 800 calon mendapat skor lebih daripada h, cari nilai bagi h.	[(a) 3286 ; (b) $h = 62.05$]

LATIHAN SOALAN SPM SEBENAR

KERTAS 1

1. SPM 2010 K1Q25

Pemboleh ubah rawak diskret X mempunyai satu taburan kebarangkalian binomial dengan $n = 4$, dengan keadaan n ialah bilangan percubaan.

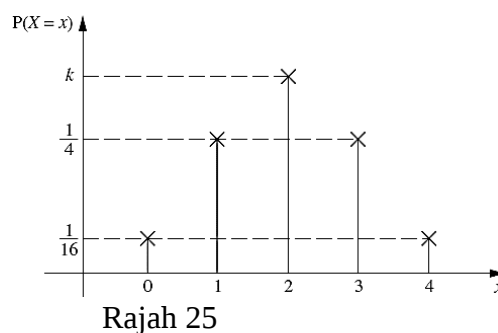
Rajah di bawah menunjukkan taburan kebarangkalian bagi X .

Cari

(a) nilai k ,

(b) $P(X \geq 3)$

[4 markah]



[(a) $\frac{3}{8}$; (b) $\frac{5}{16}$]

2. SPM 2011 K1Q25

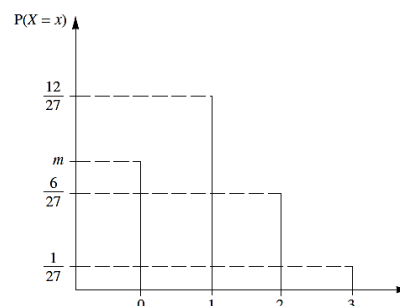
Rajah menunjukkan graf suatu taburan binomial bagi X .

Cari

(a) $P(X \geq 1)$

(b) nilai m .

[3 markah]



Rajah 25

[(a) $\frac{19}{27}$; (b) $\frac{8}{27}$]

3. SPM 2012 K1Q25

Dalam satu ujian, 60% daripada pelajar telah lulus. Satu sampel yang terdiri daripada 8 pelajar dipilih secara rawak.

Cari kebarangkalian bahawa lebih daripada 6 pelajar daripada sampel itu lulus ujian tersebut.

[3 markah]

[0.1064]

4. SPM 2013 K1 Q25

Pembolehubah rawak X mewakili taburan Binomial dengan 10 percubaan dan kebarangkalian berjaya ialah $\frac{1}{3}$. Cari

- (a) sisihan piawai taburan itu,
- (b) kebarangkalian bahawa sekurang-kurangnya satu percubaan adalah berjaya.

[4 markah]

[(a) 1.4907 ; (b) 0.9827]

5. SPM 2016 K1 Q2

Dua keping syiling adil dilambung serentak. H mewakili peristiwa mendapat kepala dan T mewakili peristiwa mendapat ekor.

- (a) Senaraikan ruang sampel menggunakan tatanda set.
- (b) Diberi X ialah pemboleh ubah rawak diskret mewakili bilangan kepala diperoleh, senaraikan nilai-nilai X yang mungkin.

[2 markah]

[(a) $S = \{HH, HT, TH, TT\}$; (b) $X = 0, 1, 2$]

6. SPM 2016 K1 Q24

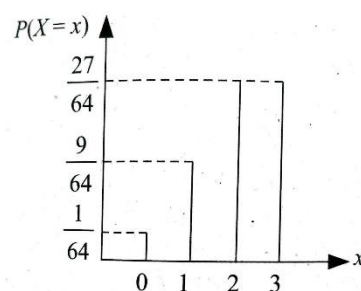
Persatuan pengguna ABC menjalankan tinjauan tentang jangka hayat bagi jenama mentol lampu tertentu. Didapati bahawa kebarangkalian jangka hayat mentol lampu itu kurang daripada enam bulan ialah p .

Sampel 3 biji mentol lampu dipilih secara rawak.

Rajah 24 menunjukkan keputusan tinjauan itu, dengan keadaan X mewakili bilangan mentol lampu yang mempunyai jangka hayat kurang daripada enam bulan.

Rajah 24

- (a) Cari nilai p .
- (b) Hitung bilangan mentol lampu yang masih berfungsi selepas 6 bulan, jika 20 mentol lampu dari jenama yang sama digunakan.

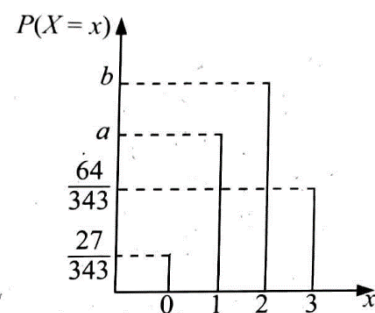


[(a) $\frac{3}{4}$; (b) 5]

7. SPM 2017 Question 24

Rajah 9 menunjukkan graf bagi taburan binomial $X \sim B(3, p)$.

- (a) Ungkapkan $P(X = 0) + P(X > 2)$ dalam sebutan a dan b .
(b) Cari nilai p .
(c)



Rajah 9
[3 markah]

[(a) $1 - a - b$; (b) $p = \frac{4}{7}$]

8. SPM 2018 K1 Q24

Sebuah badan sukarela menganjurkan kursus pertolongan cemas 4 kali sebulan, setiap Sabtu dari Mac hingga September.

[Andaikan setiap bulan mempunyai empat hari Sabtu]

Sueraya berhasrat untuk menyertai kursus tersebut tetapi dia mungkin perlu meluangkan satu hari Sabtu setiap bulan untuk menemani ibunya ke hospital.

Kebarangkalian bahawa Sueraya akan hadir ke kursus tersebut pada setiap Sabtu ialah 0.8. Sueraya akan diberi sijil kehadiran bulanan jika dia boleh menghadiri kursus tersebut sekurang-kurangnya 3 kali sebulan.

- (a) Cari kebarangkalian bahawa Sueraya akan diberi sijil kehadiran bulanan.
(b) Sueraya akan layak untuk menduduki ujian pertolongan cemas jika dia memperoleh lebih daripada 5 sijil kehadiran bulanan.

Cari kebarangkalian bahawa Sueraya layak untuk menduduki ujian pertolongan cemas itu.

[4 markah]

[(a) 0.8192 ; (b) 0.6301]

9. SPM 2005 K1Q25

Jisim murid di sebuah sekolah mempunyai taburan normal dengan min 54 kg dan sisihan piawai 12 kg.

Carikan

- (a) jisim murid apabila skor piawai ialah 0.5.
- (b) peratus murid yang jisimnya lebih daripada 48 kg.

[4 markah]

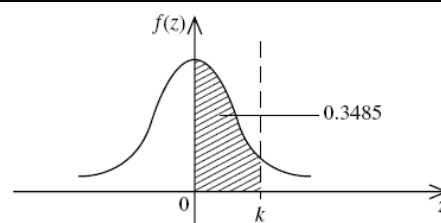
[(a) 60 kg ; (b) 0.69146]

10. SPM 2006 K1Q25

Rajah di bawah menunjukkan satu graf taburan normal piawai.

Kebarangkalian yang diwakili oleh luas kawasan berlorek ialah 0.3485.

- (a) Cari nilai k .
- (b) X ialah pemboleh ubah rawak selanjar bertaburan secara normal dengan min 79 dan sisihan piawai 3.
Cari nilai X apabila skor- z ialah k .



Rajah 25

[4 markah]

[(a) 1.03 ; (b) 82.09]

11. SPM 2008 K1Q25

Jisim sekumpulan murid sebuah sekolah mempunyai taburan normal dengan min 40 kg dan sisihan piawai 5 kg.

Hitung kebarangkalian bahawa seorang murid yang dipilih secara rawak daripada kumpulan ini mempunyai jisim

- (a) melebihi 45 kg.
- (b) antara 35 kg dan 47.8 kg.

[4 markah]

[(a) 0.1587 ; (b) 0.78196]

12. SPM 2009 K1Q25

Jisim epal di sebuah gerai mempunyai taburan normal dengan min 200 g dan sisihan piawai 30 g.

- (a) Cari jisim, dalam g, sebiji epal yang mempunyai skor-z bernilai 0.5.
- (b) Jika sebiji epal dipilih secara rawak, cari kebarangkalian bahawa epal itu mempunyai jisim sekurang-kurangnya 194 g.

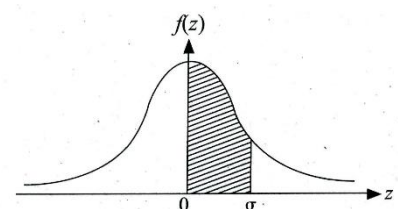
[4 markah]

[(a) 215 ; (b) 0.57926]

13. SPM 2014 K1 Q 25

Rajah 25 menunjukkan graf taburan normal piawai dengan min, μ , dan sisihan piawai, σ .

- (a) Nyatakan
 - (i) nilai μ ,
 - (ii) nilai σ
- (b) Cari luas rantau berllorek.



Rajah 25

[4 markah]

[(a) 0, 1 ; (b) 0.3413]

14. SPM 2015 K1 Q25

Pemboleh ubah X mempunyai taburan normal dengan min 25 dan sisihan piawai σ . Diberi skor-z ialah 2 apabila $X = 26.4$. Cari

- (a) nilai σ
- (b) nilai k dengan keadaan $P(X > k) = 0.3085$

[4 markah]

[(a) 0.7 ; (b) 25.35]

15. SPM 2017 K1 Q25

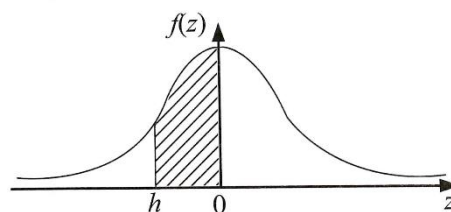
Rajah 10 menunjukkan satu graf taburan normal piawai.

Kebarangkalian yang diwakili oleh luas kawasan berlorek ialah 0.2881.

(a) Cari nilai h .

(b) X ialah pemboleh ubah rawak selanjar bertaburan secara normal dengan min, μ dan varians 16.

Cari nilai μ jika skor- z bagi $X = 58.8$ ialah h .



Rajah 10

[4 markah]

[(a) -0.8 ; (b) 62]

16. SPM 2017 K1 Q25

Rajah 1 menunjukkan graf taburan kebarangkalian bagi suatu pemboleh ubah rawak X , $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

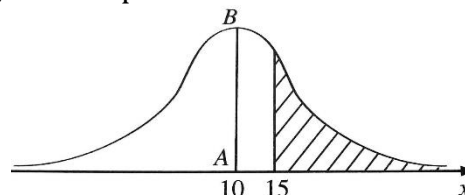
Diberi bahawa AB adalah paksi simetri bagi graf itu.

Nyatakan nilai μ .

Jika luas kawasan berlorek ialah 0.38, nyatakan nilai bagi

$P(5 \leq X \leq 15)$.

[2 markah]



Rajah 26

[2 markah]

[(a) 10; (b) 0.24]

17. SPM 2019 K1 Q25

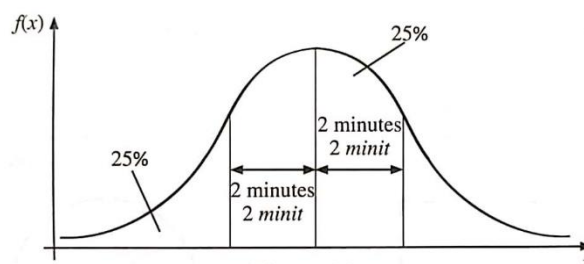
Rajah 11 menunjukkan graf taburan normal bagi masa sebuah bas sekolah untuk sampai ke sekolah.

(a) Cari sisihan piawai.

Diberi bahawa min masa untuk bas itu sampai ke sekolah ialah 7.15 pagi. Murid-murid dianggap lewat sekiranya mereka sampai selepas 1.200 pagi.

Lea menaiki bas itu ke sekolah. Hitung

kebarangkalian bahawa Lea akan sampai lewat. Beri jawapan anda betul kepada tiga angka bererti.



Rajah 11

[4 markah]

[(a) 2.9647; (b) 0.046]

LATIHAN KERTAS 2

18. SPM 2010 K2 Q10

- (a) Pembolehubah rawak, X , mengikut suatu taburan binomial dengan 10 cubaan dengan keadaan kebarangkalian kejayaan dalam setiap cubaan ialah p . Min bilangan kejayaan ialah 4.

Hitung

- (i) nilai p . [0.4]
(ii) $P(X \leq 2)$. [0.1673]

[5 markah]

- (b) Diameter bagi buah limau dari sebuah ladang adalah mengikut taburan normal dengan min 3.2 cm dan sisihan piawai 1.5 cm.

Hitung

- (i) kebarangkalian bahawa sebiji limau yang dipilih secara rawak dari ladang ini mempunyai diameter lebih daripada 3.9 cm, [0.22663]
(ii) nilai d jika 33% daripada limau itu mempunyai diameter kurang daripada d cm. [2.54]

[5 markah]

19. SPM 2012 K2 B11

- (a) Dalam suatu kajian di sebuah daerah tertentu, didapati tiga daripada lima keluarga memiliki sebuah kereta nasional.

Jika 10 keluarga dari daerah itu dipilih secara rawak, hitung kebarangkalian bahawa sekurang-kurangnya 8 keluarga memiliki sebuah kereta nasional. [0.1673]

[4 markah]

- (b) Dalam sebuah sekolah, 300 orang murid menduduki suatu ujian. Markah yang diperoleh adalah mengikut taburan normal dengan min 56 dan sisihan piawai 8.

- (i) Cari bilangan murid yang lulus ujian itu, jika markah lulus ialah 40. [0.9773]
(ii) Jika 12% daripada murid itu lulus ujian dengan mendapat gred A, cari markah minimum untuk mendapat gred A. [66]

[6 markah]

20. SPM 2013 K2 B11

- (a) Didapati bahawa 70% murid dari sebuah kelas tertentu mendapat gred A bagi Geografi dalam peperiksaan percubaan SPM.

Jika 10 orang dipilih secara rawak, cari kebarangkalian bahawa

- (i) tepat 8 orang murid mendapat A, [0.2335]
(ii) tidak lebih daripada 8 orang murid mendapat A. [0.8507]

[4 markah]

- (b) Nilai Gred Purata Berkumpul (NGPT) bagi penuntut tahun akhir di sebuah university adalah mengikut taburan normal dengan min 2.6 dan sisihan piawai 0.25.

- (i) Jika seorang penuntut dipilih secara rawak, cari kebarangkalian bahawa NGPT penuntut itu lebih daripada 3.0. [0.0548]
(ii) Ijazah akan dianugerahkan kepada penuntut tahun akhir yang memperoleh NGPT melebihi k . Jika 89.5% daripada penuntut berjaya memperoleh ijazah, cari nilai k . [2.287]

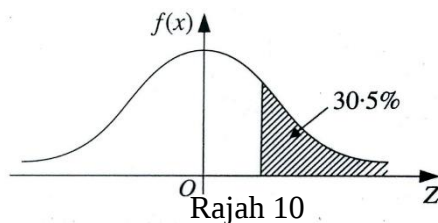
[6 markah]

21. SPM 2014 K2 B7

- (a) Satu tinjauan dijalankan berkenaan pengakap di sebuah sekolah. Didapati bahawa min bilangan pengakap ialah 315, varians ialah 126 dan kebarangkalian seorang murid menyertai pengakap ialah p .
- (i) Cari nilai p , [0.6]
 - (ii) Jika 8 orang murid dari sekolah itu dipilih secara rawak, cari kebarangkalian lebih daripada 5 orang murid menyertai pengakap. [0.3154]
- [5 markah]
- (b) Jisim ahli-ahli pengakap dalam sekolah itu adalah mengikut taburan normal dengan min 48 kg dan sisihan piawai 5.8 kg. Cari
- (i) Kebarangkalian bahawa seorang ahli yang dipilih secara rawak dari kumpulan itu mempunyai jisim kurang daripada 45 kg. [0.3026]
 - (ii) nilai m , jika 25% daripada ahli pengakap itu mempunyai jisim lebih daripada m kg. [51.91]
- [5 markah]

22. SPM 2015 K2 B10

- (a) Kebarangkalian seorang murid berbasikal ke sekolah ialah p . Suatu sampel 5 orang murid dipilih secara rawak.
- (i) Jika kebarangkalian bagi 5 orang murid itu berbasikal ke sekolah ialah 0.16807, cari nilai p . [0.7]
 - (ii) Cari kebarangkalian bahawa lebih daripada 3 orang murid berbasikal ke sekolah. [0.52822]
- [5 markah]
- (b) Rajah 10 menunjukkan satu graf taburan normal piawai yang mewakili isipadu sos cili dalam botol yang dihasilkan oleh sebuah kilang. Diberi bahawa min ialah 950 cm^3 dan variansnya ialah 256 cm^6 . Jika peratus isi padu yang melebihi V ialah 30.5%, cari
- (i) nilai V , [958.16]
 - (ii) kebarangkalian bahawa isi padunya ialah antara 930 cm^3 dan 960 cm^3 . [0.6284]



[5 markah]

23. SPM 2016 K2 B9

- (a) Didapati bahawa 20% daripada murid-murid dari Kampung Aman berjalan kaki ke sekolah. Jika 8 orang murid dari Kampung Aman dipilih secara rawak, cari kebarangkalian bahawa tepat 3 orang murid daripada mereka berjalan kaki ke sekolah. [0.1468]
- [2 markah]
- (b) Jisim nanas yang dituai dari sebuah ladang adalah mengikut taburan normal dengan min 2 kg dan sisihan piawai m kg. Diberi bahawa 15.87% daripada nanas itu mempunyai jisim lebih daripada 2.5 kg.
- (i) Hitung nilai m , [0.5]
 - (ii) Diberi bilangan nanas yang dituai dari lading itu ialah 1320, cari bilangan nanas yang mempunyai jisim antara 1.0 kg hingga 2.5 kg. [1080]
- [8 markah]

24. SPM 2017 K2 B9

- (a) Jisim bagi buah tembikai susu yang dihasilkan di sebuah ladang bertaburan secara normal dengan min 0.8 kg dan sisihan piawai 0.25 kg. Buah tembikai susu itu dikelaskan kepada tiga gred A, B dan C mengikut jisimnya:

$$\text{Gred A} > \text{Gred B} > \text{Gred C}$$

- (i) Jisim minimum bagi sebiji tembikai susu gred A ialah 1.2 kg.
Jika sebiji tembikai susu diambil secara rawak dari lading itu, cari kebarangkalian bahawa buah tembikai susu itu ialah gred A. [0.0548]
- (ii) Cari jisim minimum, dalam kg, buah tembikai susu gred B jika 20% daripada buah-buahan tembikai susu itu ialah gred C. [0.5895 kg]

[5 markah]

- (b) Dalam permainan Menembak Itik di taman hiburan, kebarangkalian untuk menang ialah 25%. Jason telah membeli tiket untuk bermain permainan itu sebanyak n kali. Kebarangkalian untuk Jason menang sekali dalam permainan itu adalah 10 kali kebarangkalian kalah dalam semua permainan.

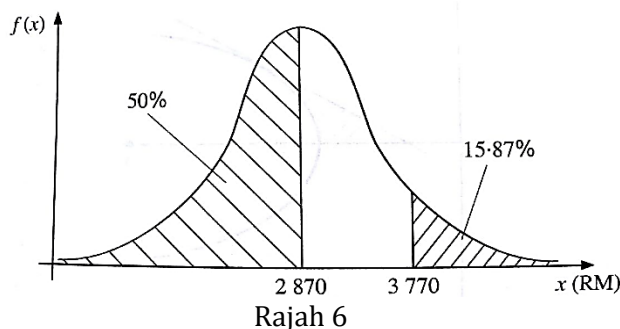
- (i) Cari nilai n , [30]

- (ii) Hitung sisihan piawai bagi bilangan kemenangan. [2.732]

[5 markah]

25. SPM 2018 K2 Q9

Satu kajian menunjukkan bahawa baki hutang kad kredit pelanggan-pelanggan adalah bertabur secara normal seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 6.



Rajah 6

- (a) (i) Cari sisihan piawai. [900]
(ii) Jika 30 orang pelanggan dipilih secara rawak, cari bilangan pelanggan yang mempunyai baki hutang kad kredit di antara RM1800 dan RM3000. [14]

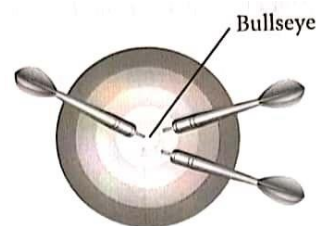
[7 markah]

- (b) Didapati bahawa 25% pelanggan mempunyai baki hutang kad kredit kurang daripada RM y . Cari nilai y . [RM2263.40]

[3 markah]

26. SPM 2019 K2 Q8

Rajah 4 menunjukkan papan sasaran 'dart' di sebuah gerai permainan 'dart' dalam pesta ria. Gerai itu menawarkan 3 'dart' bagi setiap permainan. Pelanggan perlu membayar RM5 untuk bermain satu permainan. Patung mainan beruang akan diberi kepada pelanggan yang dapat mengenai "bullseye" bagi ketiga-tiga balingan 'dart' dalam satu permainan. Bob ialah seorang pemain dart. Secara purata, balingannya kena pada "bullseye" 7 kali daripada 10 'dart' yang dibaling.



Rajah 4

- (a) Bob akan bermain permainan itu jika dia mempunyai sekurang-kurangnya 90% peluang untuk memenangi sekurang-kurangnya satu patung mainan beruang dengan membelanjakan RM30. Dengan pengiraan matematik, cadangkan kepada Bob sama ada dia patut main permainan itu atau sebaliknya. [0.9196]

[7 markah]

- (b) Berapakah bilangan minimum permainan yang Bob perlukan supaya dia boleh mendapat 4 patung mainan beruang? [12]

[3 markah]



MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

13. PENYELESAIAN SEGITIGA



NOTA

Petua Sinus

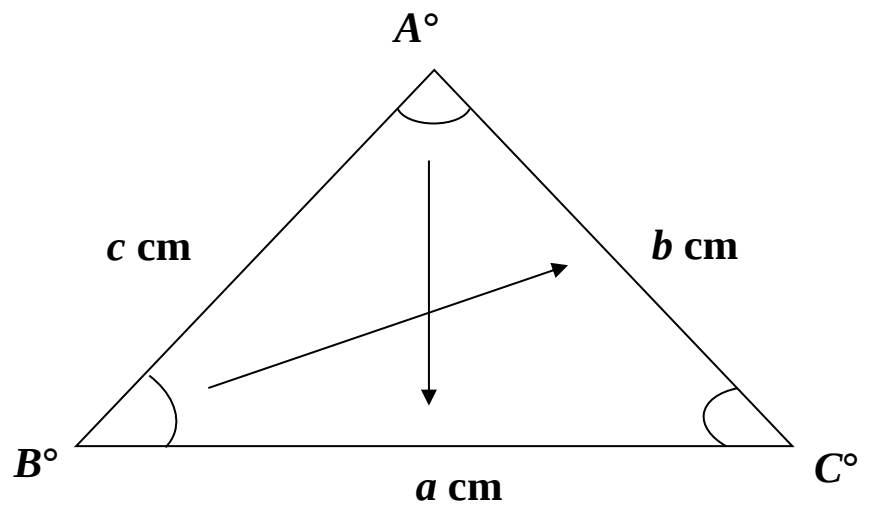
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Petua Kosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



Luas sebuah segitiga boleh diperolehi dengan rumus

$$Luas = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$Luas = \frac{1}{2} bc \sin A$$

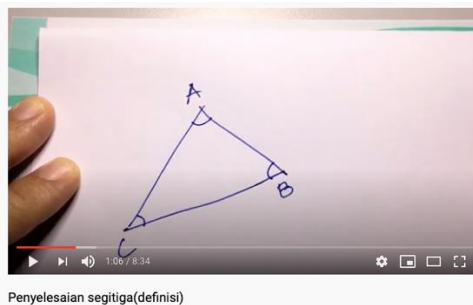
$$Luas = \frac{1}{2} ac \sin B$$

*Petua Sinus biasa digunakan apabila wujud **satu** pasangan sudut dan panjang sisi yang setentang untuk nilai yang telah diberikan (wujud b dan B, a dan A atau c dan C).

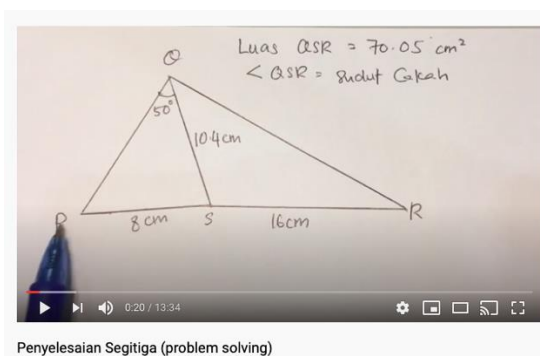
*Jika tiada pasangan, Petua Kosinus akan digunakan. Jika hanya ada dua nilai, maka **luas** akan diberikan.

*Luas sebuah segitiga boleh ditentukan apabila diketahui **dua** panjang sisi dan **satu** sudut di antara dua sisi yang kita ketahui.

NOTA TAMBAHAN



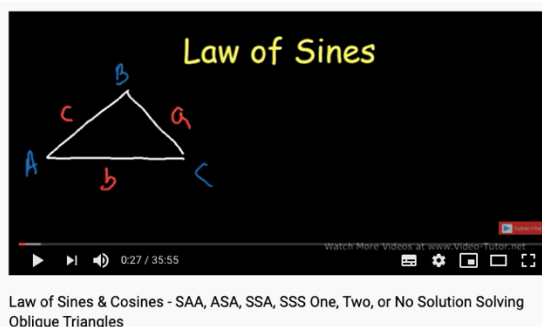
<https://www.youtube.com/watch?v=1E404FmM4UY>



https://www.youtube.com/watch?v=oD_ATyuSYRQ

Sumber:

Youtube Channel Addmath Cikgu Ummu



<https://www.youtube.com/watch?v=Kq5ng9Cq-eA>

Sumber:

My Website: <https://www.video-tutor.net>

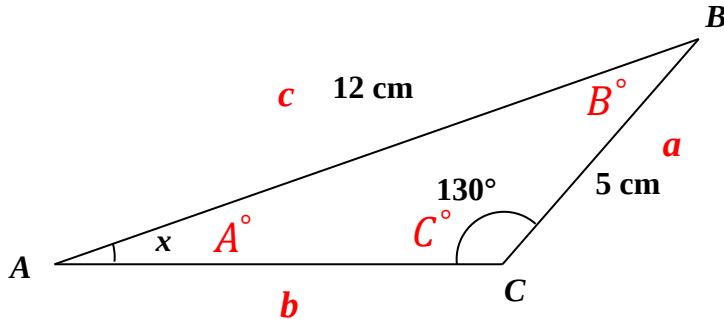
Patreon: <https://www.patreon.com/MathScienceTutor>

Amazon Store: <https://www.amazon.com/shop/theorgani...>

CONTOH

Contoh 1:

Rajah menunjukkan segitiga ABC. Cari nilai x .



Nota:

1) Labelkan sisi dan sudut ($a, b, c, A^\circ, B^\circ, C^\circ$)
 2) Tentukan sama ada menggunakan Petua Sinus atau Petua Kosinus (Tiada maklumat luas diberikan).

- Ada pasangan sudut dan sisi setentang (**Petua Sinus**)
 - Tiada pasangan (**Petua Kosinus**)
- 3) Selesaikan menggunakan formula.

Jawapan:

$$\frac{5}{\sin x} = \frac{12}{\sin 130} \quad (\text{masukkan maklumat daripada soalan})$$

$$\frac{5}{\sin x} = \frac{12}{\sin 130} \quad (\text{gunakan yang ada maklumat sahaja})$$

$$\frac{\sin x}{5} = \frac{\sin 130}{12} \quad (\text{boleh diterbalikkan kerana perlu mencari nilai } x)$$

$$\sin x = \frac{\sin 130}{12} \times 5$$

$$\sin x = 0.3192 \quad (\text{sekurang-kurangnya 4 tempat perpuluhan})$$

$$x = 18.6^\circ \quad (\text{jawapan akhir untuk sudut sekurang-kurangnya 1 tempat perpuluhan})$$

Contoh 2:

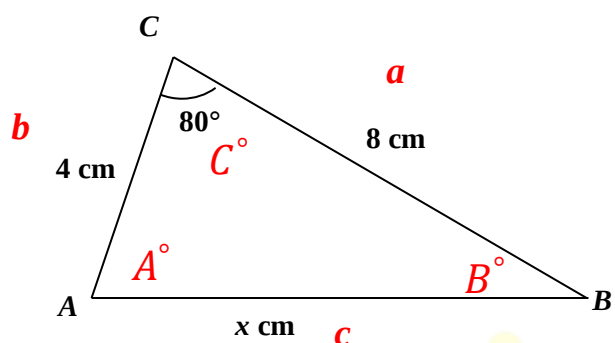
Rajah menunjukkan segitiga ABC. Cari nilai x .

Nota:

1) Labelkan sisi dan sudut ($a, b, c, A^\circ, B^\circ, C^\circ$)
 2) Tentukan sama ada menggunakan Petua Sinus atau Petua Kosinus (Tiada maklumat luas diberikan).

- Ada pasangan sudut dan sisi setentang (**Petua Sinus**)
- Tiada pasangan (**Petua Kosinus**)

3) Selesaikan menggunakan formula.



Jawapan:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (\text{masukkan maklumat ke dalam rumus yang melibatkan sudut dalam soalan})$$

$$c^2 = 8^2 + 4^2 - 2(8)(4)\cos 80^\circ$$

$$c^2 = 68.8865 \quad (\text{sekurang-kurangnya 4 tempat perpuluhan})$$

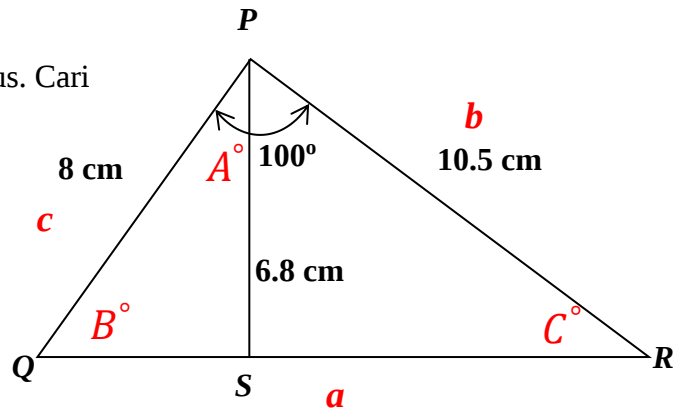
$$c = 8.30 \text{ cm} \quad (\text{jawapan akhir untuk sisi sekurang-kurangnya 2 tempat perpuluhan})$$

Contoh 3:

Rajah menunjukkan segitiga PQR. QSR ialah garis lurus. Cari

a) panjang QR

b) $\angle PQR$



Nota:

1) Labelkan sisi dan sudut ($a, b, c, A^\circ, B^\circ, C^\circ$)
 2) Tentukan sama ada menggunakan Petua Sinus atau Petua Kosinus (Tiada maklumat luas diberikan).

- Ada pasangan sudut dan sisi setentang (Petua Sinus)
- Tiada pasangan (**Petua Kosinus**)

3) Selesaikan menggunakan formula.

Jawapan:

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (masukkan maklumat ke dalam rumus yang melibatkan sudut dalam soalan)

$$a^2 = 10.5^2 + 8^2 - 2(10.5)(8)\cos 100^\circ$$

$$a^2 = 203.4229 \text{ (sekurang-kurangnya 4 tempat perpuluhan)}$$

$$a = 14.26 \text{ cm (jawapan akhir untuk sisi sekurang-kurangnya 2 tempat perpuluhan)}$$

b) $\angle PQR = B$

Menggunakan jawapan pada (a), Petua Sinus digunakan.

$$\frac{14.26}{\sin 100^\circ} = \frac{10.5}{\sin PQR} \text{ (masukkan maklumat daripada soalan)}$$

$$\frac{\sin PQR}{10.5} = \frac{\sin 100^\circ}{14.26} \text{ (boleh diterbalikkan kerana perlu mencari nilai } \angle PQR \text{)}$$

$$\sin PQR = \frac{\sin 100^\circ}{14.26} \times 10.5$$

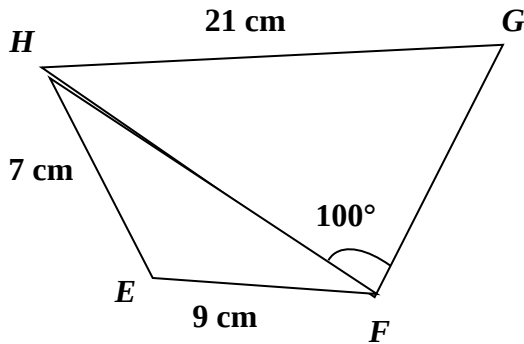
$$\sin PQR = 0.7251 \text{ (sekurang-kurangnya 4 tempat perpuluhan)}$$

$$\angle PQR = 45.5^\circ \text{ (jawapan akhir untuk sudut sekurang-kurangnya 1 tempat perpuluhan)}$$

Contoh 4:

Rajah menunjukkan sisiempat EFGH. $\angle HEF$ adalah sudut cakak dan luas segitiga HEF adalah 20 cm^2 . Hitung

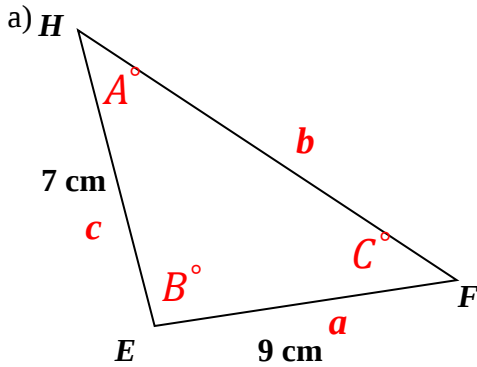
- $\angle HEF$
- panjang HF
- $\angle FHG$



Nota:

- 1) Labelkan sisi dan sudut ($a, b, c, A^\circ, B^\circ, C^\circ$) untuk segitiga yang diberikan maklumat luas segitiga (HEF)
- 2) Gunakan formula luas untuk mencari sudut
- 3) Menggunakan jawapan yang diperolehi, panjang HF dicari menggunakan Petua Kosinus kerana tiada pasangan sisi dan sudut setentang.
- 4) Soalan (c), labelkan ($a, b, c, A^\circ, B^\circ, C^\circ$) untuk segitiga FHG.
- 5) Kenal pasti Petua yang boleh digunakan untuk mencari sudut FHG (Petua Sinus kerana ada pasangan sisi dan sudut setentang).
- 6) Selesaikan menggunakan formula.

Jawapan:



$$\text{Luas} = \frac{1}{2}ac\sin B \text{ (formula luas segitiga mengikut maklumat yang ada)}$$

$$20 = \frac{1}{2}(9)(7)\sin \angle HEF$$

$$\sin \angle HEF = \frac{20(2)}{9(7)}$$

$$\sin \angle HEF = 0.6349$$

$$\angle HEF = 39.4^\circ$$

Memandangkan $\angle HEF$ merupakan sudut cakak ($180^\circ < \theta < 90^\circ$),

$$\angle HEF = 180^\circ - 39.4^\circ$$

$$\angle HEF = 140.6^\circ$$

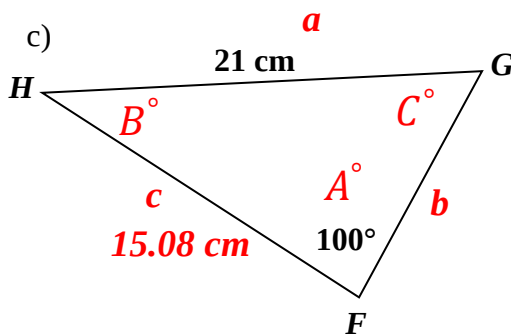
- $HF = b$, guna Petua Kosinus (tiada pasangan sisi dan sudut setentang)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$b^2 = 9^2 + 7^2 - 2(9)(7)\cos 140.6$$

$$b^2 = 227.3644$$

$$b = 15.08 \text{ cm}$$



$$\angle FHG = 180^\circ - 45.0^\circ - 100^\circ$$

Petua Sinus atau Petua Kosinus tidak dapat digunakan untuk mencari $\angle FHG = B^\circ$ secara langsung. Namun Petua Sinus boleh digunakan untuk mencari C° .

$$\frac{21}{\sin 100} = \frac{15.08}{\sin C}$$

$$\frac{\sin C}{15.08} = \frac{\sin 100}{21}$$

$$\sin C = \frac{\sin 100}{21} \times 15.08$$

$$\sin C = \frac{\sin 100}{21} \times 15.08$$

$$\sin C = 0.7072$$

$$C^\circ = 45.0^\circ$$

Maka,

$$\angle FHG = 180^\circ - 45.0^\circ - 100^\circ$$

$$\angle FHG = 35^\circ$$

Contoh 5:

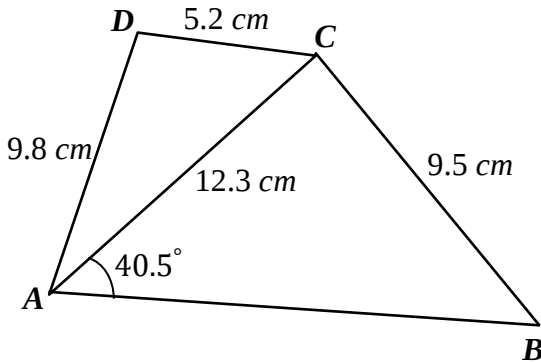
Rajah menunjukkan sisiempat ABCD dengan $\angle ABC$ adalah sudut tirus.

a) Calculate

i) $\angle ABC$

ii) $\angle ADC$

iii) luas, dalam cm^2 , sisi empat ABCD



Nota:

- 1) Labelkan sisi dan sudut ($a, b, c, A^\circ, B^\circ, C^\circ$) untuk segitiga ABC (perlu diselesaikan di "i")
- 2) Guna Petua Sinus (ada pasangan sisi dan sudut setentang)
- 3) Soalan ii, label sisi dan sudut ($a, b, c, A^\circ, B^\circ, C^\circ$) untuk segitiga ADC.
- 4) Guna Petua Kosinus (Semua sisi diberikan dan tiada pasangan sisi dan sudut setentang)
- 5) Cari luas segitiga ABC dan segitiga ADC untuk mencari luas sisiempat ABCD, menggunakan formula luas segitiga.

Jawapan:

a) i) Petua Sinus yang digunakan:

$$\frac{9.5}{\sin 40.5} = \frac{12.3}{\sin \angle ABC}$$

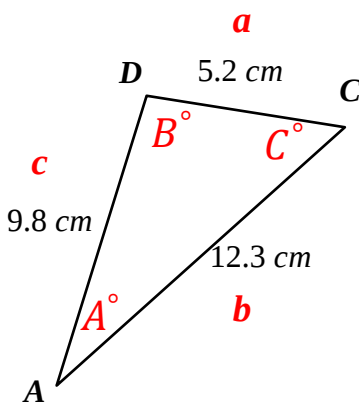
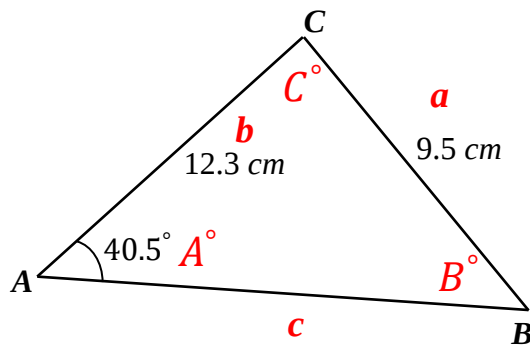
$$\frac{\sin \angle ABC}{12.3} = \frac{\sin 40.5}{9.5}$$

$$\sin \angle ABC = \frac{\sin 40.5}{9.5} \times 12.3$$

$$\sin \angle ABC = 0.8406$$

$$\angle ABC = 57.2^\circ$$

*Sudut tirus ($90^\circ < \theta < 0^\circ$)



a) ii) Petua Kosinus yang digunakan:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

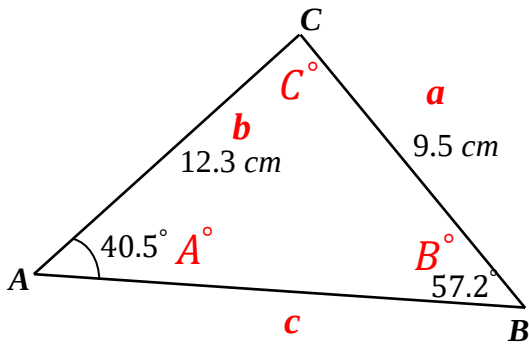
$$12.3^2 = 5.2^2 + 9.8^2 - 2(5.2)(9.8)\cos \angle ADC$$

$$2(5.2)(9.8)\cos \angle ADC = 5.2^2 + 9.8^2 - 12.3^2$$

$$\cos \angle ADC = -\frac{28.21}{101.92} \text{ (Nilai negatif menunjukkan sudut ADC berada di sukuan kedua, } 180^\circ < \theta < 0^\circ).$$

$$\angle ADC = 106.1^\circ \text{ (Tekan kalkulator terus dapat jawapan di sukuan kedua)}$$

Jawapan Contoh 5 a(iii):



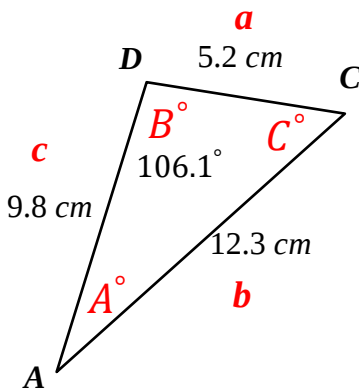
- Luas sebuah segitiga boleh ditentukan apabila diketahui **dua** panjang sisi dan **satu** sudut di antara dua sisi yang kita ketahui.
- Dua sisi yang diketahui adalah a dan b, maka untuk mencari luas, sudut C perlu dikenal pasti.

$$\angle C = 180^\circ - 40.5^\circ - 57.2^\circ = 82.3^\circ$$

$$\text{Luas } \Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} (9.5)(12.3) \sin 82.3$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = 57.898 \text{ cm}^2$$



Dua sisi yang diketahui adalah a dan c, dan sudut yang diketahui adalah sudut B. Maka luas segitiga:

$$\text{Luas } \Delta = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$\text{Luas } \Delta ADC = \frac{1}{2} (5.2)(9.8) \sin 106.1$$

$$\text{Luas } \Delta ADC = 24.481 \text{ cm}^2$$

Maka luas sisiempat ABCD adalah:

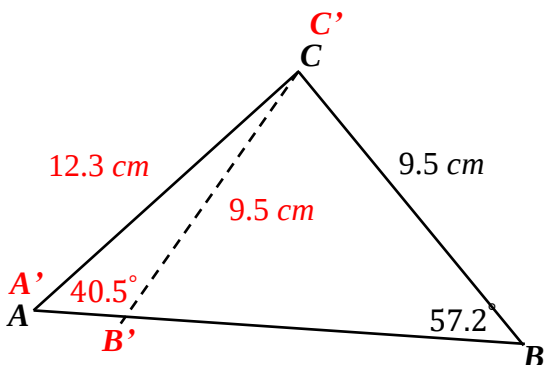
$$\text{Luas } \Delta ABC + \text{Luas } \Delta ADC = 57.898 + 24.481$$

$$\text{Luas sisiempat ABCD} = 82.379 \text{ cm}^2$$

Tambahan:

b) Satu segitiga A'B'C' yang mempunyai sama ukuran seperti segitiga ABC, iaitu A'C = 12.3 cm, C'B'=9.5 cm, dan $\angle B'A'C' = 40.5^\circ$, tetapi mempunyai bentuk yang berbeza dengan segitiga ABC.

- Lakarkan segitiga A'B'C',
- Nyatakan size $\angle A'B'C'$.



- A'C' dan B'C' dan sudut B'A'C' sama seperti rajah sebelumnya.

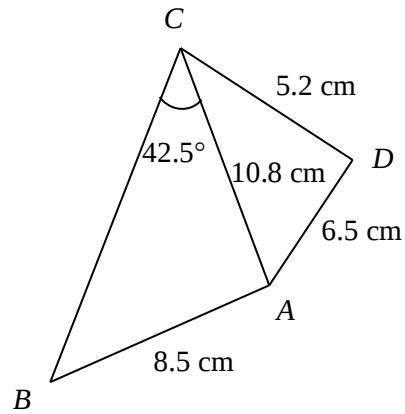
Maka, garis yang perlu dilukis adalah garis B'C' (jika melukis garis A'C' atau A'B' akan menyebabkan sudut B'A'C' berubah).

$$\angle A'B'C' = 180^\circ - 57.2^\circ$$

$$\angle A'B'C' = 122.8^\circ$$

LATIHAN

1. Rajah menunjukkan segi empat $ABCD$ dengan keadaan $\angle ABC$ adalah tirus.



(a) Hitung

(i) $\angle ABC$,

(ii) $\angle ADC$,

(iii) luas, dalam cm^2 , bagi segiempat $ABCD$.

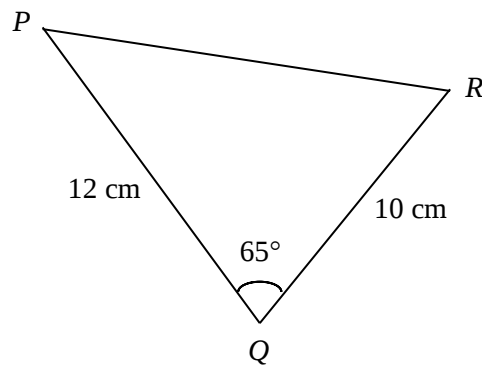
[8 m]

(b) Segi tiga $A'B'C'$ mempunyai ukuran yang sama dengan segi tiga ABC tetapi berlainan bentuk dari segitiga ABC . Lakarkan segitiga $A'B'C'$.

[2 m]

[a) i) 59.1° , ii) 134.6° , iii) 57.01 cm^2]

2. Rajah menunjukkan segitiga PQR .



- (a) Hitung panjang, dalam cm, bagi PR .

[2 m]

- (b) Segi empat $PQRS$ kemudiannya dibina dengan PR sebagai pepenjuru, $\angle PRS = 30^\circ$ dan $PS = 8.2$ cm. Hitungkan dua nilai yang mungkin bagi $\angle PSR$.

[2 m]

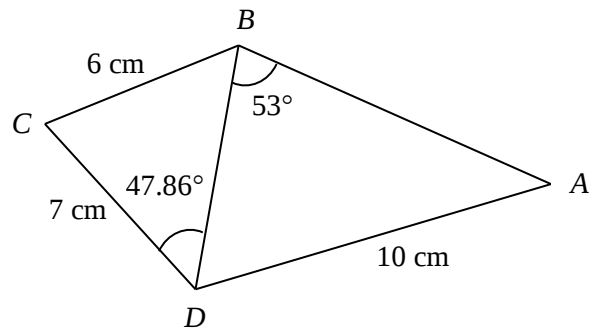
- (c) Dengan menggunakan sudut tirus bagi PSR dari (b), hitung

- (i) panjang, dalam cm, bagi RS ,
- (ii) luas, dalam cm^2 , bagi segiempat $PQRS$.

[6 m]

[a) 11.94 cm , b) 46.7° or 133.3° , c) i) 15.96 cm ii) 99.60 cm^2]

3. Rajah menunjukkan segi empat $ABCD$.

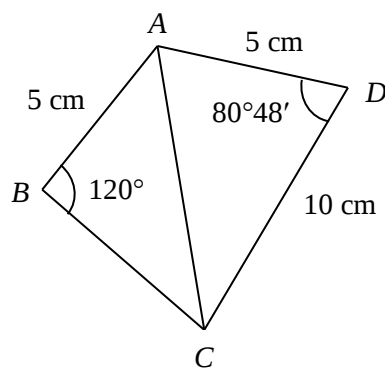


Hitung

- (a) $\angle BCD$, [2 m]
- (b) panjang, dalam cm, bagi BD , [2 m]
- (c) $\angle ADB$, [3 m]
- (d) luas, dalam cm^2 , bagi segi empat $ABCD$. [3 m]

[a) 72.25° , b) 7.71 cm , c) 89° , d) 58.54 cm^2]

4. Rajah menunjukkan segi empat $ABCD$.



(a) Hitung

(i) panjang, dalam cm, bagi AC ,

(ii) $\angle ACB$.

[4 m]

(b) Titik A' berada pada AC dengan keadaan $A'B = AB$.

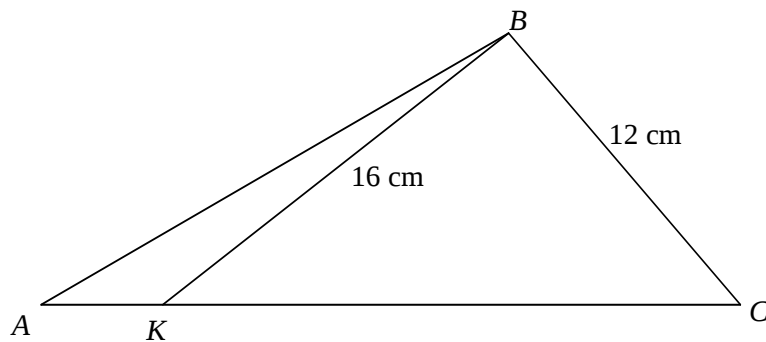
(i) Lakarkan $\triangle A'BC$.

(ii) Hitungkan luas, dalam cm^2 , bagi $\triangle A'BC$.

[6 m]

[a) i) 10.44 cm , ii) 24.5° , b) ii) 11.82 cm^2]

5. Rajah menunjukkan segitiga ABC dengan titik A terletak pada KC . Diberi $BC = 12$ cm, $BK = 16$ cm, $\sin \angle AKB = \frac{3}{5}$ bersudut cakah, dan luas segitiga $ABK = 24$ cm².



(a) Hitung panjang, dalam cm, bagi

- (i) AK ,
- (ii) AB .

[5 m]

(b) Dalam segitiga BCK , panjang CK ialah x cm. Dengan menggunakan hukum kosinus, tunjukkan bahawa x memuaskan persamaan kuadratik $5x^2 - 128x + 560 = 0$.

[2 m]

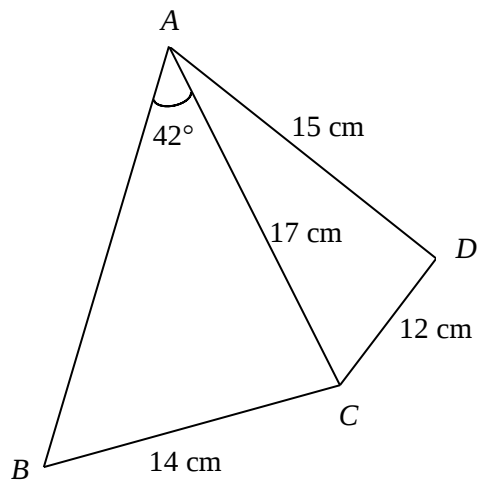
(c) Segitiga $B'C'K'$ mempunyai bentuk yang berlainan daripada segitiga BCK dengan keadaan $BC = B'C'$, $B'K' = BK$ dan $\angle BKC = \angle B'K'C'$.

- (i) Lakarkan segi tiga $B'C'K'$.
- (ii) Cari $\angle K'C'B'$.

[3 m]

[a) i) 5.02 cm, ii) 20.25 cm, c) ii) 123.4°]

6. Rajah menunjukkan segiempat $ABCD$.

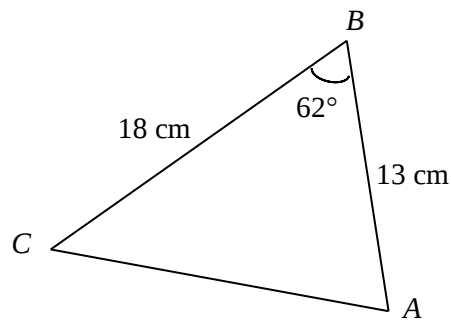


Hitung

- (a) $\angle ABC$, [2 m]
- (b) panjang, dalam cm, bagi AB , [3 m]
- (c) $\angle CAD$, [2 m]
- (d) luas, dalam cm^2 , segi empat $ABCD$. [3 m]

[a) 54.3° , b) 20.80 cm , c) 24.5° , d) 206.1 cm^2]

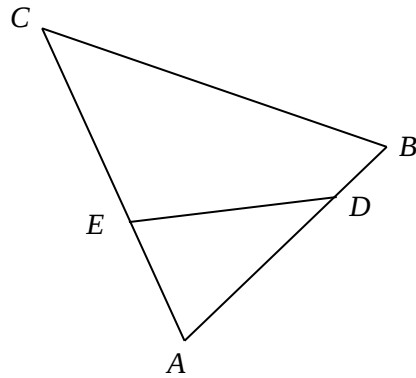
7. Rajah menunjukkan segi tiga ABC .



- (a) Hitung panjang, dalam cm, bagi AC . [2 m]
- (b) Segi empat $ABCD$ dibina dengan keadaan AC adalah pepenjuru, $\angle ACD = 35^\circ$ dan $AD = 14$ cm. Hitung dua nilai yang mungkin bagi $\angle ADC$. [3 m]
- (c) Dengan menggunakan sudut dari (b), hitung
- (i) panjang, dalam cm, bagi CD ,
- (ii) luas, dalam cm^2 , bagi segi empat $ABCD$. [5 m]

a) 16.53 cm, b) 42.6° or 137.4° , c) i) 23.88 cm or 3.24 cm ii) 118.6 or 216.22 cm^2

8. Rajah menunjukkan segitiga ABC dengan keadaan ADB dan AEC adalah garis lurus.



Diberi bahawa $AD = 7.2$ cm, $AE = 4.6$ cm, $BC = 10.7$ cm, $DE = 6.3$ cm dan $\angle ACB = 46^\circ$.

(a) Hitung

- (i) $\angle BAC$,
- (ii) panjang, dalam cm, bagi AC .

[4 m]

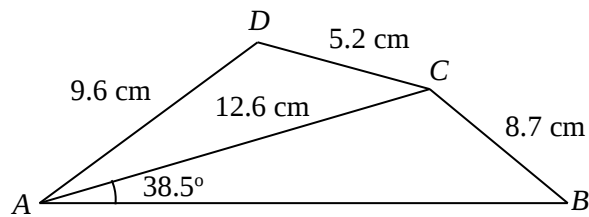
(b) Titik A' berada pada AC dengan keadaan $AB = A'B$.

- (i) Lakarkan $\triangle A'BC$.
- (ii) Hitungkan luas, dalam cm^2 , $\triangle A'BC$.

[6 m]

a) i) 59.1° , ii) 9.41 cm, b) ii) 35.46 cm^2

9. Rajah menunjukkan segi empat $ABCD$ dengan keadaan $\angle ABC$ ialah sudut tirus.



(a) Hitung

- (i) $\angle ABC$,
- (ii) $\angle ADC$,
- (iii) luas, dalam cm^2 , segi empat $ABCD$.

[7 m]

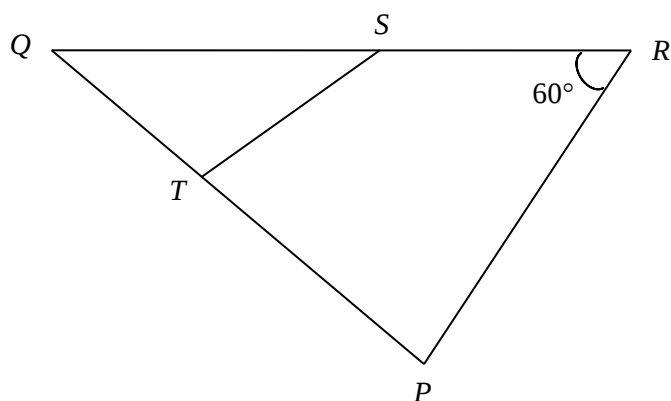
(b) Segi tiga $A'B'C'$ mempunyai ukuran yang sama dengan segi tiga ABC , di mana, $A'C' = 12.6$ cm, $C'B' = 8.7$ cm dan $\angle C'A'B' = 38.5^\circ$ tetapi mempunyai bentuk yang berbeza berbanding dengan segi tiga ABC dengan keadaan $A'C' = 12.6$ cm.

- (i) Lakarkan segitiga $A'B'C'$.
- (ii) Hitung panjang, dalam cm, $A'B'$.

[3 m]

a) i) 64.4° , ii) 113.3° , iii) 76.35 cm^2 , b) ii) 13.62 cm

10. Rajah menunjukkan segitiga PQR dengan keadaan QR dan T berada pada QP .



Diberi bahawa $SQ = 13$ cm, $QT = 10$ cm, $SR = 17$ cm, $TP = 18$ cm dan $\angle QRP = 60^\circ$.

(a) Cari

(i) $\angle QPR$,

(ii) panjang, dalam cm, bagi ST .

[5 m]

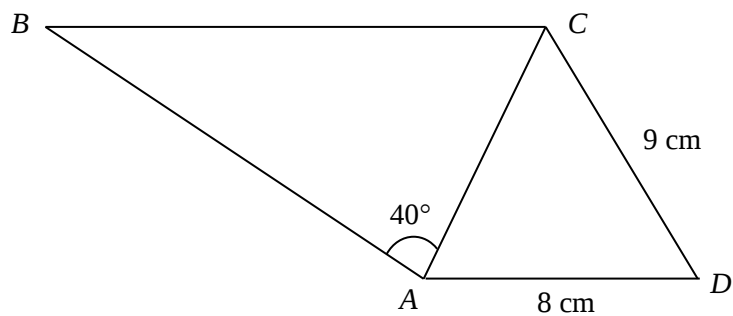
(b) Cari luas, dalam cm^2 , segiempat $SRPT$.

(c) Titik P' berada pada PQ dengan keadaan $P'R = PR$. Cari panjang, dalam cm, bagi $P'Q$.

[2 m]

a) i) 68.1° , ii) 10.42 cm, b) 279.36 cm^2 , c) 9.02 cm]

11. Rajah menunjukkan segi empat $ABCD$.



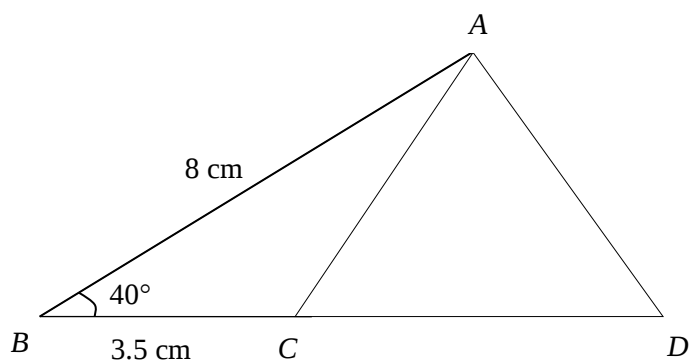
Diberi bahawa BC dan AD adalah selari. Luas bagi segi tiga ACD ialah 30.18 cm^2 .

Cari
Find

- (a) $\angle CDA$, [2 m]
- (b) panjang, dalam cm, bagi AC , [2 m]
- (c) $\angle ABC$, [3 m]
- (d) luas, dalam cm^2 , segi tiga ABC . [3 m]

a) i) 57.0° , b) 8.12 cm , c) 71.6° , d) 5.5 cm^2

12. Rajah menunjukkan segi tiga ABD . Titik C berada pada garis lurus BD dengan keadaan $BC = 3.5$ cm and $AC = AD$. Diberi bahawa $AB = 8$ cm dan $\angle ABC = 40^\circ$.



Hitung

- (a) panjang AD ,

[3 m]

- (b) $\angle ACB$,

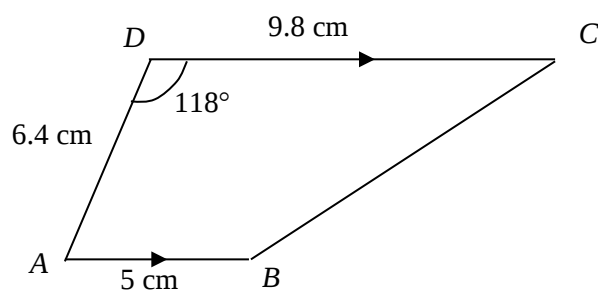
[4 m]

- (c) luas segi tiga ABD .

[3 m]

a)i) 5.76 cm, b) 117.4° , c) 22.49 cm^2

13. Rajah menunjukkan trapezium $ABCD$ dengan keadaan AB dan DC adalah selari.



Diberi bahawa $AB = 5 \text{ cm}$, $AD = 6.4 \text{ cm}$, $DC = 9.8 \text{ cm}$ dan $\angle ADC = 118^\circ$.

Cari

(a) panjang, dalam cm, bagi

(i) AC ,

(ii) BD ,

[4 m]

(b) $\angle ABD$,

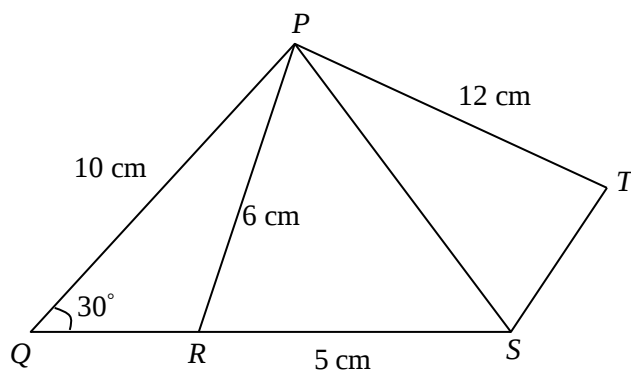
[2 m]

(c) luas, dalam cm^2 , segi tiga BCD .

[3 m]

a)i) 14.0 cm , ii) 6.0 cm b) 70.4° , c) 27.70 cm^2

14. Rajah menunjukkan sisiempat $PQST$. QRS ialah garis lurus dan $\angle PRQ$ adalah cakah.



Diberi bahawa luas $\triangle PST = 30\text{ cm}^2$.

Hitung

- (a) $\angle PRQ$, [2 m]
- (b) panjang, dalam cm, bagi PS , [3 m]
- (c) $\angle SPT$, [2 m]
- (d) luas, dalam cm^2 , bagi sisi empat $PRST$. [3 m]

a) 123.6° , b) 5.27 cm , c) 71.6° d) 42.49 cm^2



MODUL MATEMATIK TAMBAHAN

SPM TAHUN 2020

14. NOMBOR INDEKS



NOTA & FORMULA

Apa itu Nombor Indeks?

Nombor Indeks ialah suatu ukuran untuk menunjukkan perubahan bagi suatu kuantiti tertentu untuk suatu tempoh masa yang dinyatakan dengan memilih satu tempoh sebagai tahun asas.

The diagram illustrates the formula for the Index Number ($I_{b/a}$). It features a central box with the formula $I_{b/a} = \frac{Q_b}{Q_a} \times 100$. Three callout boxes provide context: a purple box on the left points to the subscript a and says 'Nombor indeks pada tahun b berasaskan tahun a '; a light blue box at the top right points to Q_b and says 'kuantiti pada masa tertentu'; a light green box at the bottom right points to Q_a and says 'kuantiti pada masa asas'.

$$I_{b/a} = \frac{Q_b}{Q_a} \times 100$$

Nombor indeks dikira dengan membahagi kuantiti pada masa tertentu dengan kuantiti pada masa asas kemudian didarab dengan 100.

Contohnya bilangan pelancong yang melawat daerah Tenom pada tahun 2019 ialah 32000 orang manakala seramai 29000 orang melawat daerah Tenom bagi tempoh yang sama pada tahun 2018. Indeks bilangan pelancong yang daerah Tenom pada tahun **2019 berasaskan tahun 2018** boleh dihitung seperti berikut:

Maklumat

$$Q_{2019} = 32000$$

$$Q_{2018} = 29000$$

$$\begin{aligned} I_{19/18} &= \frac{32000}{29000} \times 100 \\ &= 110.34 \end{aligned}$$

Daripada nombor indeks bilangan pelancong di atas, didapati bilangan pelancong meningkat sebanyak 10.34% dari tahun 2018 ke tahun 2019.

Apa itu Indeks Harga?

Indeks harga merupakan satu ukuran yang digunakan untuk menunjukkan perubahan harga bagi suatu barangan tertentu pada masa yang diberikan.

Indeks harga merupakan sejenis nombor indeks yang kerap digunakan



Bagi indeks harga Q_b atau Q_a juga boleh diwakili dengan P_b or P_a (P untuk harga-price)

$$I_{b/a} = \frac{Q_b}{Q_a}$$

I = indeks harga
 Q_b = harga barangan pada masa **tertentu**
 Q_a = harga barangan pada masa **asas**

Tepung	Harga pada tahun 2018	Harga pada tahun 2020	Indeks Harga bagi tahun 2020 berasaskan tahun 2018 (2018=100)	Perubahan % harga dari tahun 2018 ke tahun 2020
Jenama A	RM 2.20	RM 2.40	$\frac{2.40}{2.20} \times 100 = 109.9$	Meningkat 9.9%
Jenama B	RM 2.50	RM 2.10	$\frac{2.10}{2.50} \times 100 = 84$	Menurun 16%
Jenama C	RM 2.30	RM 2.30	$\frac{2.30}{2.30} \times 100 = 100$	Tidak Berubah

Daripada indeks harga dalam jadual di atas, didapati harga tepung Jenama A meningkat sebanyak 9.9% ($109.9 - 100 = 9.9$) dari tahun 2018 ke 2020. Harga tepung Jenama B menurun sebanyak 16% ($84 - 100 = -16$) dari tahun 2018 ke 2020 dan tepung Jenama C tidak mengalami perubahan harga kerana itu indeks harganya tetap 100.

Oleh itu, dengan melihat **nombor indeks** atau **indeks harga** suatu bahan, kita boleh mengetahui peratus perubahan kuantiti atau harga bahan itu dari satu tahun asas kepada tahun tertentu.

$$\text{Peratus perubahan harga} = (I_{b/a} - 100)\%$$

Jika jawapan +% = bertambah / meningkat / menokok

Jika Jawapan -% = berkurang / menyusut

Apa itu Indeks Gubahan?

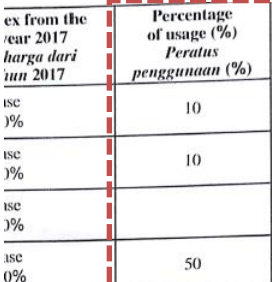
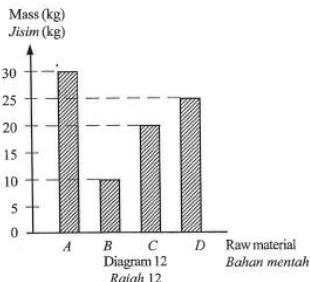
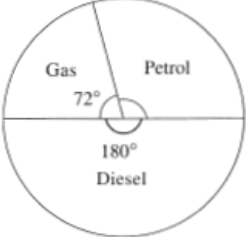
Indeks gubahan ($\bar{I}$) merupakan min berpemberat bagi semua item dalam sesuatu situasi. Pemberat (W) ialah satu nilai berangka yang mewakili kepentingan setiap item.

$$\bar{I} = \frac{I_1W_1 + I_2W_2 + I_3W_3 + \dots + I_nW_n}{W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n} = \frac{\sum I_i W_i}{\sum W_i}$$

$\bar{I}$

hasil tambah (nombor indeks $\times$ pemberat)

Jenis-jenis Pemberat (W)

Nisbah	Peratus	Carta Palang	Carta Pai
			

Komponen	Indeks Harga bagi tahun 2020 berdasarkan tahun 2018	Pemberat
P	110	3
Q	120	1
R	95	4
S	105	2

Merujuk jadual di atas, komponen P, Q, R dan S diperlukan untuk membina seunit peranti elektronik. Indeks harga bagi tahun 2020 berdasarkan tahun 2018 dan pemberat bagi setiap komponen diberikan dalam jadual. Indeks gubahan bagi pembinaan seunit peranti elektronik boleh dihitung seperti berikut:

$$\bar{I} = \frac{110(3) + 120(1) + 95(4) + 105(2)}{3 + 1 + 4 + 2}$$

$$\bar{I} = \frac{1040}{10} = 104$$

NOTA TAMBAHAN

Bagaimana Cara Menulis Maklumat Dalam Perwakilan Matematik?

Bagi memudahkan anda menyusun maklumat daripada soalan, kuasai kemahiran menulis maklumat dalam perwakilan matematik seperti dalam jadual berikut:

Contoh maklumat	Pewakilan Matematik
Bilangan <i>hand sanitizer</i> terjual pada tahun 2015 ialah 87000 botol.	$Q_{15} = 87000$
Harga sebuah pencetak 3-Dimensi pada tahun 2019 ialah RM980	$Q_{19} = 980$
Nombor indeks bagi penghasilan pelitup mulut sebuah kilang pada tahun 2020 berasaskan tahun 2018 ialah 220	$I_{20/18} = 220$
Indeks harga bagi sebuah rumah pada tahun 2020 berasaskan tahun 2017 ialah 180	$I_{20/17} = 180$
Harga sebuah telefon pintar bertambah 10% dari tahun 2019 ke tahun 2020	$I_{20/19} = (100 + 10) = 110$
Harga sepasang kasut susut 14% dari tahun 2018 ke tahun 2019	$I_{29/18} = (100 - 14) = 86$
Jualan kuih Ezzy menyusut 8% dari tahun 2019 ke tahun 2020	$I_{20/19} = (100 - 9) = 92$

Bagaimana Cara Mencari Q_a atau Q_b ?

Kuantiti atau harga pada suatu masa tertentu boleh diwakilkan dengan huruf Q . Kuantiti atau harga boleh dicari jika salah satu nilai Q_a atau Q_b dan nombor indeks diberikan. Untuk membantu anda menjawab, tuliskan formula nombor indeks terlebih dahulu. Kemudian, senaraikan semua maklumat yang anda dapat daripada soalan menggunakan perwakilan matematik untuk memudahkan anda.

$$\text{Formula asas : } I_{b/a} = \frac{Q_b}{Q_a} \times 100$$

$$\text{Mencari } Q_b = Q_a \times \frac{I_{b/a}}{100}$$

$$\text{Mencari } Q_a = Q_b \times \frac{100}{I_{b/a}}$$

Contoh 1 : Diberi nombor indeks / indeks harga dan salah satu daripada Q_a atau Q_b

Indeks harga sekilogram beras pada tahun 2020 ialah 120 dengan mengambil tahun 2010 sebagai tahun asas. Diberi harga beras pada tahun 2020 ialah RM1.20 sekilogram. Hitungkan harga sekilogram beras pada tahun 2010.

Senaraikan semua maklumat dalam perwakilan matematik : $Q_{20} = 1.20$, $I_{20/10} = 120$, $Q_{10} = ???$

$$I_{20/10} = \frac{Q_{20}}{Q_{10}} \times 100 =$$

$$120$$

$$Q_{10} = Q_{20} \times \frac{100}{I_{20/10}}$$

$$Q_{10} = 1.20 \times \frac{100}{120}$$

Harga sekilo beras pada tahun 2010 ialah RM1.00.

Contoh 2 : Diberi nombor indeks / indeks harga dan salah satu daripada Q_a atau Q_b

Nombor indeks bagi penghasilan basikal sebuah kilang ialah 140 pada tahun 2018 berasaskan tahun 2016. Diberi bahawa kilang itu menghasilkan 250 buah basikal pada tahun 2016. Hitungkan bilangan basikal yang dihasilkan pada tahun 2018.

Senaraikan semua maklumat dalam perwakilan matematik : $Q_{16} = 250$, $I_{18/16} = 140$, $Q_{18} = ???$

$$I_{18/16} = \frac{Q_{18}}{Q_{16}} \times 100 =$$

$$140$$

$$Q_{18} = Q_{16} \times \frac{I_{18/16}}{100}$$

$$Q_{18} = 250 \times \frac{140}{100}$$

Bilangan basikal yang dihasilkan pada tahun 2018 ialah 350 buah.

Kaedah mudah : Jadual YIQ (Year, Index, Quantity)

Bagi pelajar yang mengalami kesukaran dalam mencari nilai Q_a , Q_b atau nombor indeks, kaedah Jadual YIQ boleh digunakan. Jadual adalah seperti di bawah. Pelajar perlu mengisi kolum Tahun dengan dua tahun yang terlibat, kolum indeks pula diisi nilai 100 bagi tahun yang dijadikan tahun asas. Seterusnya isi sama ada nilai Q_a , Q_b atau indeks yang diberikan. Nilai yang ingin dicari boleh diwakilkan dengan sebarang pemalar (selalunya, x). Setelah semua nilai diisi, pelajar gunakan **konsep kadaran** dengan nisbah nilai dalam kolum indeks adalah berkadaran dengan nisbah nilai dalam kolum kuantiti.

Tahun (Year)	Indeks (Index)	Kuantiti (Quantity)
a (tahun asas)	100 (100 kerana ia adalah asas)	Q_a
b (tahun tertentu)	$I_{b/a}$	Q_b

Jadual YIQ

Nisbah nilai dalam lajur indeks adalah berkadaran dengan nisbah nilai dalam lajur kuantiti, maka formula berikut boleh digunakan:

$$\frac{100}{I_{b/a}} = \frac{Q_a}{Q_b}$$

Setelah semua nilai dikenalpasti dan ditulis, pelajar boleh menggunakan kalkulator untuk menyelesaikan perkadaran ini dengan menggunakan ciri **SHIFT + CALC** di kalkulator Casio fx-570MS/991MS atau kalkulator lain yang setara.

Contoh 1

Diberi kuantiti suatu bahan pada tahun 2019 ialah 130 manakala pada tahun 2020 kuantiti bahan sama ialah 105. Hitungkan nombor indeks bahan tersebut bagi tahun 2020 menggunakan tahun 2019 sebagai tahun asas.

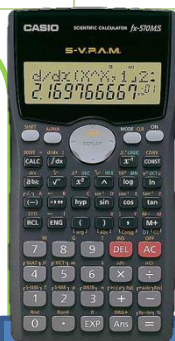
Tahun (Y)	Indeks (I)	Kuantiti (Q)
2019 (asas)	100	130
2020	x	105

$$I_{2020/2019} = \frac{Q_b}{Q_a} \times 100 = x$$

$$\frac{100}{x} = \frac{130}{105}$$

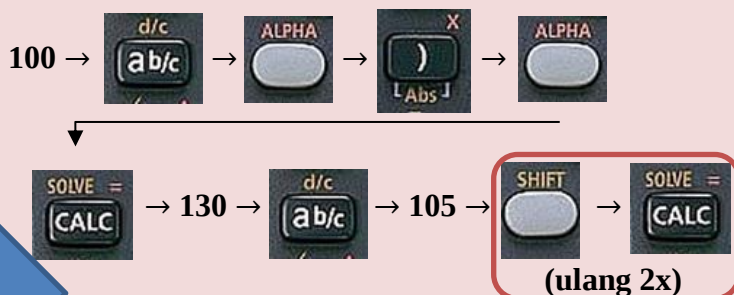
$$130x = 10500$$

$$x = 80.77$$



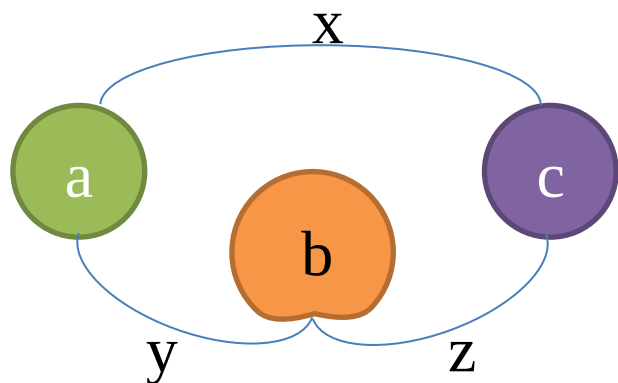
guna
kalkulator

Cara guna ciri SHIFT + SOLVE di Casio fx570MS

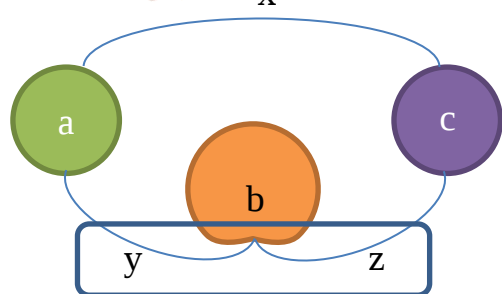


Kaedah mudah : Rajah Sid untuk nombor indeks 3 tahun berbeza

Rajah Sid di bawah boleh membantu pelajar mencari nombor indeks atau indeks harga yang melibatkan 3 tahun dengan tahun asas berbeza. Bagi memahami kaedah Rajah Sid, imbas kod QR video penerangan kaedah di bahagian Kod QR dan pautan video.



cari x



a,b,c ialah tahun dan ditulis secara tertib menaik dari kiri ke kanan

$x - I_{c/a}$: indeks tahun c berasaskan tahun a

$y - I_{b/a}$: indeks tahun b berasaskan tahun a

$z - I_{c/b}$: indeks tahun c berasaskan tahun b

Untuk Mencari nilai x ($I_{c/a}$)

1. Tutup x dengan jari anda
2. Tinggal y dan z
3. Jika kedudukan y dan z ialah bersebelahan, maka guna formula darab berikut:

$$I_{c/a} = x = \frac{y \times z}{100}$$

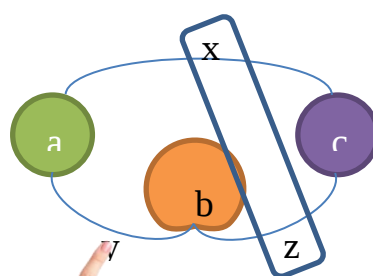
Untuk Mencari nilai y ($I_{b/a}$)

1. Tutup y dengan jari anda
2. Tinggal x dan z
3. Jika kedudukan x dan z ialah atas dan bawah, maka guna formula bahagi berikut:

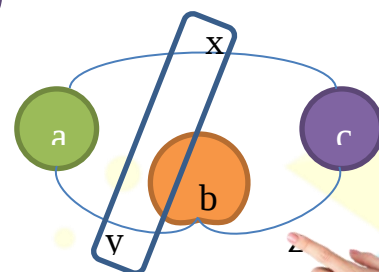
$$I_{b/a} = y = \frac{x}{z} \times 100$$

**cara yang sama digunakan untuk mencari nilai z.

$$I_{c/b} = z = \frac{x}{y} \times 100$$



cari y



cari z

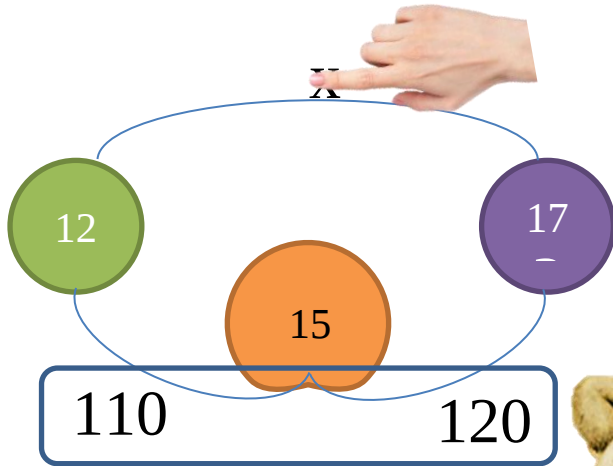
Rajah Sid sebab
macam bentuk
muka saya kan.....
(Sid, Ice Age)

Contoh penggunaan rajah Sid

Contoh 1

Indeks harga bagi sebuah buku pada tahun 2015 berasaskan tahun 2012 ialah 110. Indeks harganya pada tahun 2017 berasaskan tahun 2015 pula ialah 120. Hitungkan indeks harga bagi buku itu bagi tahun 2017 berasaskan tahun 2012.

Maklumat : $I_{15/12} = 110$, $I_{17/15} = 120$, $I_{17/12} = ?$



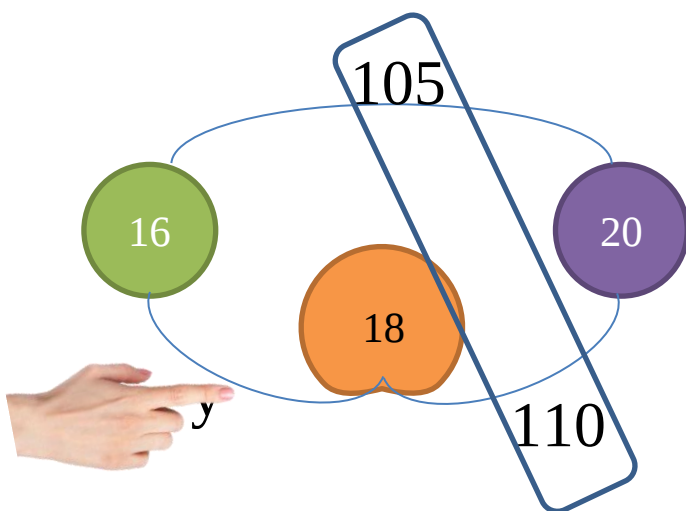
- Susun tahun 12, 15, 17 dari kiri ke kanan
- Tutup x, didapati 110 dan 120 bersebelahan, guna formula darab:

$$I_{17/12} = \frac{110 \times 120}{100} = 132$$

Contoh 2

Indeks harga bagi sebuah kereta model X bagi tahun 2020 ialah 105 apabila tahun 2016 diambil sebagai tahun asas dan 110 jika tahun 2018 diambil sebagai tahun asas. Cari indeks harga kereta model X dalam tahun 2018 apabila tahun 2016 diambil sebagai tahun asas.

Maklumat : $I_{20/16} = 105$, $I_{20/18} = 110$, $I_{18/16} = ?$



- Susun tahun 16, 18, 20 dari kiri ke kanan
- Tutup y, didapati 105 dan 110 berada di atas dan bawah, guna formula bahagi:

$$I_{18/16} = \frac{105}{110} \times 100 = 95.45$$

KOD QR / PAUTAN VIDEO

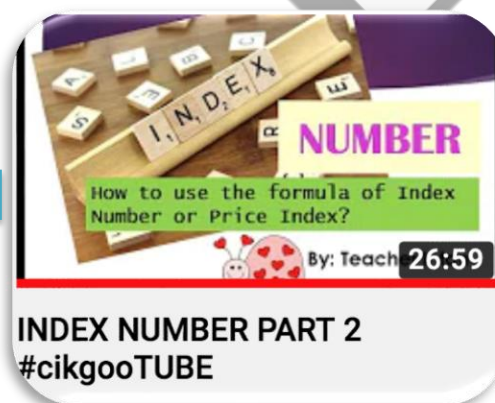
Bagi membantu anda memahami dengan lebih baik konsep Nombor Indeks, anda boleh menonton video dalam pautan di bawah. Hanya tekan imej atau imbas Kod QR di bawah menggunakan telefon pintar anda dan anda boleh belajar mengikut kadar anda sendiri!



SCAN ME



SCAN ME



Kaedah Rajah Sid

Kenapa Rajah Sid?



Contoh 2: Penggunaan Rajah Sid

Indeks harga sejenis tepung pada tahun 2007 berdasarkan tahun 2005 ialah 98. Jika indeks harga pada tahun 2007 berdasarkan tahun 2003 ialah 145. Cari Indeks harga pada tahun 2007 berdasarkan tahun 2003.

$$I_{07/05} = 98$$
$$I_{05/03} = 145$$
$$I_{07/03} = ?$$
$$I_{07/03} = \frac{145 \times 98}{100} = 142.1$$

$$I_{c/a} = \frac{y \times z}{100} = x$$



SCAN ME

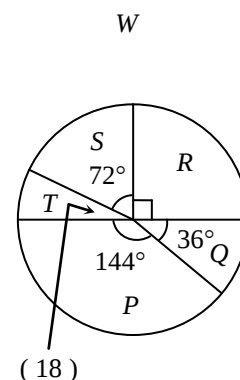
Kredit : [Teacher Intan](#) | YouTube



CONTOH

1. Jadual menunjukkan harga dan indeks harga bagi lima komponen, P , Q , R , S dan T , yang digunakan untuk menghasilkan suatu jenis alat mainan. Rajah menunjukkan carta pai yang mewakili kuantiti relatif bagi penggunaan komponen-komponen itu.

Komponen	Q_{04} Q_{06}		$I_{06, 04}$
	Harga (RM) pada tahun		Harga indeks pada tahun 2006 berasaskan tahun 2004
	2004	2006	
P	1.20	1.50	125
Q	x	2.20	110
R	4.00	6.00	150
S	3.00	2.70	y
T	2.00	2.80	140



- (a) Cari nilai x dan nilai y .
- (b) Hitung nombor indeks gubahan bagi kos penghasilan alat mainan itu pada tahun 2006 berasaskan tahun 2004.
- (c) Harga setiap komponen meningkat 20% dari tahun 2006 ke tahun 2008. Diberi kos penghasilan satu alat mainan itu pada tahun 2004 ialah RM55, hitung kosnya yang sepadan pada tahun 2008.

a) <i>Komponen Q</i>, $I_{06/04} = 110$ <table> <tr> <th>Tahun</th><th>Indeks</th><th>Kuantiti</th></tr> <tr> <td>2004</td><td>100</td><td>x</td></tr> <tr> <td>2006</td><td>110</td><td>2.20</td></tr> </table> $\frac{100}{110} = \frac{x}{2.20}$ $110x = 220$ $x = 2$			Tahun	Indeks	Kuantiti	2004	100	x	2006	110	2.20
Tahun	Indeks	Kuantiti									
2004	100	x									
2006	110	2.20									
<i>Komponen S</i>, $I_{06/04} = y$, $Q_{06} = 2.70$, $Q_{04} = 3.00$ <table> <tr> <th>Tahun</th><th>Indeks</th><th>Kuantiti</th></tr> <tr> <td>2004</td><td>100</td><td>3.00</td></tr> <tr> <td>2006</td><td>y</td><td>2.70</td></tr> </table> $\frac{100}{y} = \frac{3.00}{2.70}$ $3.00y = 270$ $y = 90$			Tahun	Indeks	Kuantiti	2004	100	3.00	2006	y	2.70
Tahun	Indeks	Kuantiti									
2004	100	3.00									
2006	y	2.70									
b) $\bar{I}_{06/04} =$ $\frac{125(144) + 110(36) + 150(90) + 140(18)}{360}$ $= \frac{44460}{360}$ $= 123.5$		c) $\bar{I}_{08/04} = 123.5 \times \frac{(100+20)}{100}$ $= 148.2$ $\frac{Q_{08}}{Q_{04}} = \frac{148.2}{100}$ $\frac{Q_{08}}{55} = 1.482$ $Q_{08} = 81.51$									

2. (a) Indeks harga bagi sejenis barang pada tahun 2005 berasaskan tahun 2000 dan tahun 1995 ialah masing-masing 120 dan 135. Diberi harga barang itu ialah RM 45 pada tahun 2000, hitung harganya pada tahun 1995.

(b) Sejenis mesin dibuat dengan menggunakan empat komponen, P , Q , R dan S . Jadual menunjukkan indeks harga bagi komponen itu pada tahun 2005 berasaskan tahun 2000, perubahan harga daripada tahun 2005 ke tahun 2008, dan pemberat masing-masing.

Komponen	$I_{05/00}$	Perubahan harga dari tahun 2005 ke tahun 2008	W	$I_{08/00}$
	Indeks harga bagi tahun 2005 berasaskan tahun 2000		Pemberat	
P	120	Menyusut 5%	5	114
Q	130	Tidak berubah	4	130
R	105	Menokok 20%	k	126
S	115	Tidak berubah	3	115

Hitung

(i) nilai k , jika indeks gubahan bagi tahun 2005, berasaskan tahun 2000 ialah $118\frac{2}{3}$,

(ii) indeks gubahan bagi tahun 2008, berasaskan tahun 2000,

(iii) kos untuk membuat mesin itu pada tahun 2008 jika kos yang sepadan pada tahun 2000 ialah RM 1080.

(a) $I_{05, 00} = 120$, $I_{05, 95} = 135$

$$\begin{aligned}\therefore I_{00, 95} &= \frac{I_{05, 95}}{I_{05, 00}} \times 100 \\ &= \frac{135}{120} \times 100 \\ &= 112.5\end{aligned}$$

$$\frac{Q_{00}}{Q_{95}} = \frac{112.5}{100}$$

$$\frac{45}{Q_{95}} = 1.125$$

$$40 = Q_{95}$$

@

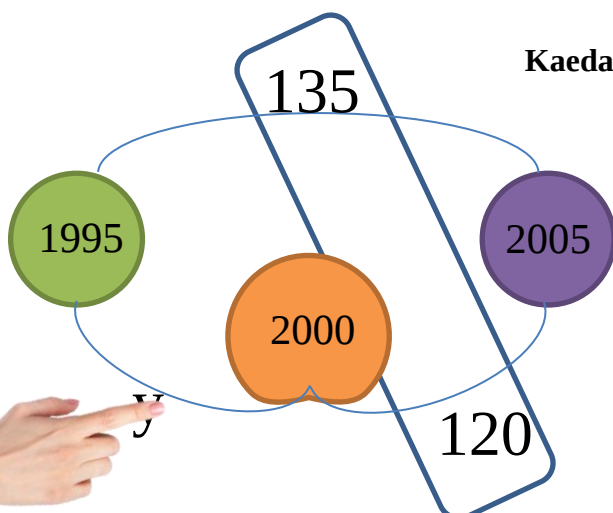
$I_{05, 00} = 120$, $I_{05, 95} = 135$

$$\therefore \frac{I_{05, 95}}{I_{05, 00}} = \frac{Q_{00}}{Q_{95}}$$

$$\frac{135}{120} = \frac{45}{Q_{95}}$$

$$Q_{95} = 40$$

Kaedah rajah Sid



$$y \rightarrow I_{00/95} = \frac{135}{120} \times 100$$

$$I_{00/95} = 112.5 = \frac{Q_{00}}{Q_{95}} \times 100$$

$$\frac{112.5}{100} = \frac{Q_{00}}{Q_{95}}$$

$$\frac{112.5}{100} = \frac{45}{Q_{95}} \rightarrow \text{tekan kalkulator}$$

$$Q_{95} = 40$$



$$(b) \quad (i) \quad \frac{120(5) + 130(4) + 105(k) + 115(3)}{k+12} = 118\frac{2}{3}$$

$$\frac{105k + 1465}{k+12} = \frac{356}{3}$$

$$315k + 4395 = 356k + 4272$$

$$123 = 41k$$

$$3 = k$$

$$(ii) \quad \bar{I}_{08,00} = \frac{114(5) + 130(4) + 126(3) + 115(3)}{15}$$

$$= \frac{1813}{15}$$

$$= 120.87$$

$$(iii) \quad \bar{I}_{08,00} = 120.87$$

$$\frac{Q_{08}}{Q_{00}} = \frac{120.87}{100}$$

$$\frac{Q_{08}}{1080} = 1.2087$$

$$Q_{08} = 1305.396$$

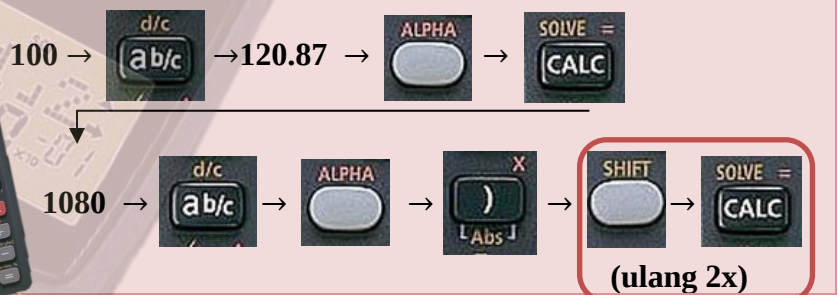
atau

Tahun	Indeks	Kuantiti
2000	100	1080
2008	120.87	Q_{08}

$$\frac{100}{120.87} = \frac{1080}{Q_{08}}$$

$$Q_{08} = 1305.396$$

Guna ciri SHIFT + SOLVE di Casio fx570MS



LATIHAN

Bahagian ini terbahagi kepada DUA iaitu latihan konsep asas dan soalan sebenar SPM bagi tahun tertentu. Untuk memastikan anda menguasai topik ini dengan lebih baik, jawablah semua soalan latihan yang disediakan. Good luck!

LATIHAN KONSEP ASAS

1. Hitungkan nombor indeks bagi setiap yang berikut:

a) Bilangan pelajar yang mendaftar di sebuah IPTA pada tahun 2018 ialah 2950 orang manakala seramai 3300 pelajar mendaftar pada tahun 2020. Hitungkan indeks pelajar mendaftar di IPTA pada tahun 2020 dengan menggunakan tahun 2018 sebagai tahun asas.	b) Harga bagi sepasang kasut ialah RM 220 pada tahun 2019 manakala harga sepasang kasut yang sama ialah RM 210 pada tahun 2020. Hitungkan indeks harga bagi kasut itu pada tahun 2020 berasaskan tahun 2018. Seterusnya, nyatakan peratus perubahan harga bagi kasut itu dari tahun 2019 ke tahun 2020.
c) Sebiji telur masin berharga 80 sen pada tahun 2010 dan RM1.20 pada tahun 2020. Dengan mengambil tahun 2010 sebagai tahun asas, hitungkan indeks harga telur masin pada tahun 2020.	d) Sebuah syarikat motorsikal menjual 1800 buah motorsikal pada tahun 2015. Pada tahun 2018 pula, syarikat itu menjual 2200 buah motorsikal. Hitungkan nombor indeks bagi penjualan motorsikal syarikat itu pada tahun 2018 berasaskan tahun 2015.
e) Indeks harga petrol pada tahun 2020 ialah k berbanding dengan 2019 sebagai tahun asas. Diberi harga petrol adalah RM 2.20 seliter pada tahun 2019 dan RM 1.70 seliter pada tahun 2020. Cari nilai k .	f) Harga sebuah rumah teres pada tahun 2016 ialah RM260000 tetapi harganya pada tahun 2020 ialah RM320000. Cari indeks harga rumah teres itu pada tahun 2020 dengan mengambil tahun 2016 sebagai tahun asas.

2. Cari nilai Q_a atau Q_b dalam setiap yang berikut:

- a) Indeks harga satu pek beras ialah 125 bagi tahun 2020 berasaskan tahun 2012. Diberi harga satu pek beras pada tahun 2020 ialah RM18.50. Cari harga satu pek beras itu pada tahun 2012.
- b) Bilangan kereta yang terlibat dalam kemalangan jalan raya pada tahun 2017 ialah 3500 buah. Indeks bilangan kereta yang terlibat dalam kemalangan jalan raya bagi tahun 2019 berasaskan tahun 2017 ialah 118. Hitungkan bilangan kereta yang terlibat dalam kemalangan jalan raya pada tahun 2019.

- c) Indeks harga suatu barang pada tahun 2011 dengan mengambil tahun 2008 sebagai tahun asas ialah 165. Harga barang itu pada tahun 2008 ialah RM600. Hitung harga barang itu pada tahun 2011.
- d) Indeks harga bagi sebuah kalkulator bertambah 15% daripada tahun 2017 ke tahun 2019. Jika harga kalkulator itu pada tahun 2019 ialah RM65, hitungkan harga kalkulator itu pada tahun 2017.

- e) Harga dan bilangan unit terjual bagi sebuah model telefon pintar pada tahun 2018 dan 2019 adalah seperti di dalam jadual berikut.

Tahun	Harga (RM)	Bilangan Unit Terjual
2018	p	420
2019	1250	q

- i) Diberi indeks harga bagi telefon pintar itu bagi tahun 2019 dengan tahun 2018 sebagai tahun asas ialah 125. Cari nilai bagi p .
- ii) Cari nilai q jika nombor indeks bagi bilangan unit terjual ialah 95 bagi tahun 2019 dengan tahun 2018 sebagai asas.

3. Hitungkan Indeks Gubahan dalam setiap yang berikut:

- a) Jadual di bawah menunjukkan indeks harga perbelanjaan keluarga Qhuzairy pada tahun 2017 berasaskan tahun 2015.

Perbelanjaan	Indeks Harga Perbelanjaan (tahun asas 2015)	Pemberat
Makanan	130	5
Sewa rumah	120	3
Pengangkutan	100	2
Elektrik, internet dan air	125	1
Pakaian	95	1

Hitungkan indeks gubahan bagi perbelanjaan keseluruhan keluarga Qhuzairy bagi tahun 2017 berasaskan tahun 2015.

- b) Jadual di bawah menunjukkan indeks harga dan pemberat bagi empat jenis makanan bagi tahun 2019 dengan menggunakan tahun 2015 sebagai tahun asas.

Makanan	Indeks Harga	Pemberat
Ayam	123	7
Daging	115	k
Udang	148	3
Ikan	138	5

Diberi indeks gubahan bagi tahun 2019 berasaskan tahun 2015 ialah k . Hitungkan nilai bagi k .

- c) Jadual di bawah menunjukkan bahan-bahan yang digunakan oleh Pretty untuk membuat sebuku roti. Lajur kedua jadual ini menunjukkan peratusan kenaikan harga bahan-bahan ini pada tahun 2019 berbanding dengan tahun 2015. Lajur ketiga menunjukkan kandungan setiap bahan dalam sebuku roti yang dihasilkan.

Bahan	Peratusan kenaikan harga	Peratusan dalam setiap buku roti
Tepung	25%	70%
Gula	15%	10%
Minyak	10%	5%
Yis	30%	15%

Tuliskan indeks bagi setiap bahan itu pada tahun 2019 jika tahun 2015 diambil sebagai tahun asas. Seterusnya, hitungkan indeks gubahan bagi kos pengeluaran roti itu pada tahun 2019 berasaskan tahun 2015.

4. Hitungkan nombor indeks bagi setiap yang berikut: (Tips : gunakan rajah Sid)

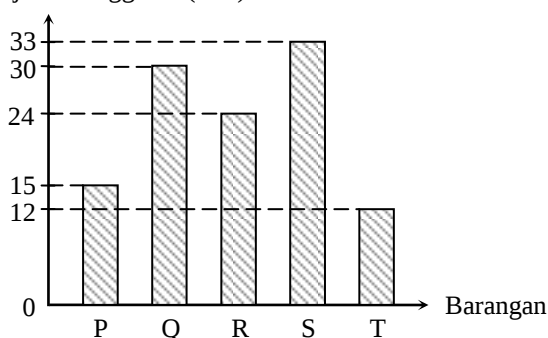
- | | |
|---|--|
| <p>a) Diberi indeks gubahan bagi kos perbelanjaan sekolah Michelle pada tahun 2019 berasaskan tahun 2018 ialah 120 dan 110 jika berasaskan tahun 2017. Hitungkan indeks gubahan bagi perbelanjaan sekolah Michelle bagi tahun 2018 berasaskan tahun 2017.</p> | <p>b) Indeks gubahan bagi keuntungan perniagaan Bevieani bagi tahun 2017 berasaskan tahun 2016 ialah 120 dan 118 bagi tahun 2016 berasaskan tahun 2015. Hitungkan Indeks gubahan keuntungan perniagaan Bevieani bagi tahun 2017 berasaskan tahun 2015.</p> |
|---|--|

SOALAN SPM LEPAS

SPM 2003 Soalan 13 (Pemberat : carta palang)

- 26 Rajah menunjukkan carta palang bagi perbelanjaan mingguan untuk barangan P, Q, R, S dan T pada tahun 1990. Jadual menunjukkan harga dan indeks harga barangan tersebut.

Perbelanjaan Mingguan (RM)



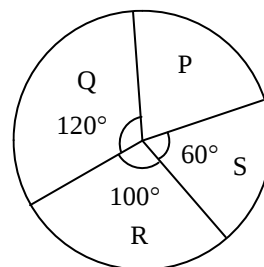
Barangan	Harga pada 1990	Harga pada 1995	Indeks Harga 1995 dengan 1990 sebagai tahun asas
P	x	RM 0.70	175
Q	RM 2.00	RM 2.50	125
R	RM 4.00	RM 5.50	y
S	RM 6.00	RM 9.90	150
T	RM 2.50	z	120

- Cari nilai x , y , dan z . [3 markah]
- Kirakan nombor indeks gubahan bagi harga barangan itu pada tahun 1995 dengan tahun 1990 sebagai tahun asas. [2 markah]
- Jumlah perbelanjaan bulanan bagi barangan itu pada tahun 1990 ialah RM456. Hitungkan jumlah perbelanjaan bulanan yang sepadan pada tahun 1995. [2 markah]
- Kos barangan itu meningkat 20% dari tahun 1995 ke tahun 2000. Carikan nombor indeks gubahan tahun 2000 dengan tahun 1990 sebagai tahun asas. [3 markah]

SPM 2005 Soalan 13 (Pemberat : Carta Pai)

- 27 Jadual menunjukkan harga dan indeks harga empat bahan, P, Q, R dan S, yang digunakan untuk membuat sejenis biskut. Rajah ialah carta pai yang mewakili kuantiti relatif bagi penggunaan bahan-bahan P, Q, R dan S itu.

Bahan	Harga se kg (RM)		Indeks harga tahun 2004 berasaskan tahun 2001
	Tahun 2001	Tahun 2004	
P	0.80	1.00	x
Q	2.00	y	140
R	0.40	0.60	150
S	z	0.40	80



- (a) Carikan nilai x , y dan z ,

[3 markah]

- (b) (i) Hitungkan nombor indeks gubahan bagi kos membuat biskut itu pada tahun 2004 bersaskan tahun 2001.
(ii) Seterusnya, hitungkan kos membuat biskut itu yang sepadan bagi tahun 2001 jika kos membuatnya pada tahun 2004 ialah RM2985.

[5 markah]

- (b) Kos membuat biskut itu dijangka meningkat sebanyak 50% dari tahun 2004 ke 2007. Carikan nombor indeks gubahan kos membuat biskut itu yang dijangkakan pada tahun 2007 bersaskan tahun 2001.

[2 markah]

SPM 2015 Soalan 15 (Pemberat : Nisbah)

28 Jadual menunjukkan indeks harga bagi tahun 2013 dan 2015 berasaskan tahun 2011 untuk tiga jenis bahan A, B, dan C yang digunakan untuk membuat sejenis kasut.

<i>Bahan</i>	<i>Indeks harga pada tahun 2013 berasaskan tahun 2011</i>	<i>Indeks harga pada tahun 2015 berasaskan tahun 2011</i>
<i>A</i>	106	120
<i>B</i>	105	125
<i>C</i>	110	<i>m</i>

(a) Harga bahan C pada tahun 2011 ialah RM12.00 dan harganya pada tahun 2015 ialah RM15.60. Cari

(i) nilai m ,

(ii) harga bagi bahan C pada tahun 2013.

[3 markah]

(b) Indeks gubahan untuk kos pengeluaran kasut itu pada tahun 2013 berasaskan tahun 2011 ialah 106.7. Nisbah bahan-bahan A, B dan C yang digunakan ialah $2 : h : 3$. Cari

(i) nilai h ,

(ii) harga sepadan bagi kasut itu pada tahun 2011 jika harga kasut itu pada tahun 2013 ialah RM58.20.

[5 markah]

(c) Cari indeks harga bagi bahan B pada tahun 2015 berasaskan tahun 2013.

[3 markah]

SPM 2018 Soalan 13 (Pemberat : Peratus)

29 Jadual menunjukkan maklumat berkaitan empat bahan, *P*, *Q*, *R* dan *S*, yang digunakan dalam pembuatan satu jenis mi.

<i>Bahan</i>	<i>Perubahan indeks harga dari tahun 2013 ke tahun 2017</i>	<i>Peratus penggunaan (%)</i>
<i>P</i>	Menokok 40%	10
<i>Q</i>	Menokok 20%	10
<i>R</i>	Menokok 60%	
<i>S</i>	Menyusut 10%	50

Kos pengeluaran bagi mi ini ialah RM47600 pada tahun 2017

(a) Jika harga bahan *Q* pada tahun 2013 ialah RM4.20, cari harganya pada tahun 2017.

[2 markah]

(b) Peratus penggunaan bagi beberapa bahan diberikan dalam jadual. Hitung kos pengeluaran yang sepadan pada tahun 2013.

[5 markah]

(c) Kos pengeluaran dijangka meningkat sebanyak 50% dari tahun 2017 ke tahun 2019. Hitung peratus perubahan kos pengeluaran dari tahun 2013 ke tahun 2019.

[3 markah]

JAWAPAN

Latihan Konsep Asas

1.
 - a) 111.86
 - b) 95.45, harga menyusut sebanyak 4.55%
 - c) 150
 - d) 122.22
 - e) 77.27
 - f) 123.08
2.
 - a) RM14.80
 - b) 4130
 - c) RM990
 - d) RM56.52
 - e) i) $p=1000$
ii) $q=399$
3.
 - a) 119.17
 - b) 5
 - c) Tepung = 125, Gula = 115, Minyak = 110, Yis = 130, Indeks gubahan = 124
- 4
 - a) 91.67
 - b) 141.6

Soalan SPM Lepas

Soalan 1 (SPM 2003)

- a) $x=0.40$, $y=137.5$, $z=3.00$
- b) 140.92
- c) RM642.60
- d) 169.14

Soalan 2 (SPM 2005)

- a) $x = 125$, $y = 2.80$, $z = 0.50$
- b) i) 129.44
iii) RM2306.09
- c) 194.16

Soalan 3 (SPM 2015)

- a) i) 130
ii) RM13.20
- b) i) 5
ii) RM54.55
- c) 119.05

Soalan 4 (SPM 2018)

- a) RM5.04
- b) RM40000
- c) 78.5



PENGHARGAAN

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)
- 6)
- 7)
- 8)

SENARAI PANEL PENGGUBAL

- | | | |
|-----|--------------------------|-------------------------------|
| 1) | Pn. Jamaliah Mohd. Elmi | SMK Tamparuli, Tuaran |
| 2) | Pn. Laila Hijrah M. Iyen | SMK Bahang, Penampang |
| 3) | Dr. Ma Chi Nan | SM St Michael, Penampang |
| 4) | En. Lee Chiong Tee | SM St Peter, Telipok |
| 5) | En. Peter Wong Yung Ming | Sekolah Tinggi Kota Kinabalu |
| 6) | En. Hafizi Fazli Bakar | SMK Kemabong, Tenom |
| 7) | En. Ong Choon Keat | SM St John Tuaran |
| 8) | Pn. Hasriani Asri Atjeng | SM St James Tenghilan, Tuaran |
| 9) | Pn. Lau Ming Choo | SMK Bahang, Penampang |
| 10) | Pn. Norfadzilah Lee | SMJK Tiong Hua, Sandakan |

***‘FAILURE DOESN’T MEAN THE GAME IS OVER,
IT MEANS TRY AGAIN WITH EXPERIENCE’***

